IL RISPARMIO

Anno LXVI - n. 1 Gennaio - Marzo 2023
Rivista trimestrale di Acri
Associazione di Fondazioni e di Casse di Risparmio Spa

01

Poste Italiane Spa Sped. in abb. post. 70% DCB Roma - com. 20 lett. c - Art. 2 legge 662 del 23/12/96 - Filiale di Roma - Romanina

REGOLAMENTO PER LA SOTTOMISSIONE DEI MANOSCRITTI PER LA PUBBLICAZIONE NELLA RIVISTA *IL RISPARMIO*

1. PREMESSA

L'invio dei manoscritti alla Rivista per una valutazione ai fini della pubblicazione, presuppone l'accettazione da parte degli autori delle regole di pubblicazione di seguito esposte.
In particolare, gli autori devono:

- dichiarare che il proprio manoscritto, o parti significative di esso, non sia stato pubblicato altrove;
- dichiarare che il proprio manoscritto non sia sotto *review* per altra pubblicazione;
- dichiarare che il proprio manoscritto non sarà inviato per altra pubblicazione prima della risposta finale del Comitato Scientifico sull'esito del processo di referaggio.

2. SOTTOMISSIONE MANOSCRITTI

Gli articoli vanno inviati al Comitato Scientifico via mail all'indirizzo *elisabetta.boccia@acri.it* in formato testo che includa il testo, le note e la bibliografia da pubblicare, corredati da un *Abstract* in italiano e in inglese di non più di 300 parole, indicando il codice JEL, disponibile su http://www.aeaweb.org/joumal/elclasjn.html.
L'autore può proporre il suo lavoro per la pubblicazione in lingua inglese. Rimarrà a cura dell'autore la revisione del lavoro in lingua inglese qualora esso non venga considerato adeguato agli *standard* linguistici.
Sulla prima pagina del manoscritto va specificata 1'Università o Ente di appartenenza, un numero telefonico e un indirizzo di posta elettronica dell'autore (o di almeno un autore nel caso di saggi a firma congiunta).
Il manoscritto deve essere formattato secondo quanto stabilito nella sezione "note per gli autori", pubblicata sul sito della rivista www.ilrisparmioreview.it.

3. PROCESSO DI REFERAGGIO

Il Comitato Scientifico esamina il manoscritto e, qualora lo giudichi potenzialmente idoneo per la pubblicazione nella Rivista, lo invia a tre *referee* per un triplo referaggio anonimo.

- La decisione iniziale del Comitato Scientifico richiede circa due settimane.
- La stesura dei rapporti dei *referee* richiede circa I mese.

Sulla base delle indicazioni dei *referee*, il Comitato Scientifico accetta l'articolo, richiede una revisione, oppure rifiuta l'articolo; in ogni caso verrà fornito agli autori un *feedback*.
In caso di accettazione da parte del Comitato Scientifico, si autorizzerà la pubblicazione e la stampa del lavoro assegnando, inoltre, il numero della rivista e l'anno in cui sarà pubblicato.
La fase di correzione delle bozze e di stampa del lavoro richiede circa I mese.

4. VARIE

Il Comitato Scientifico si aspetta che gli autori che inviano i propri manoscritti alla Rivista siano disponibili ad accettare di collaborare come *referee* nel caso in cui venga presentata loro tale richiesta.
Gli articoli pubblicati sul Risparmio saranno segnalati nelle bibliografie ECONLIT e EJEL.

IL RISPARMIO

"Il Risparmio Review" is included in JEL on CD, e-JEL and Econlit,
the electronic indexing and abstracting service
of the American Economic Association

Redazione
Via del Corso, 267 - 00186 Roma
Tel. 06 68184387 - Fax 06 68184223
elisabetta.boccia@acri.it
www.ilrisparmioreview.it
www.acri.it

Codice ISSN 0035-5617 (print)
Codice ISSN 1971-9515 (online)

INDICE

SULLA MODELLIZZAZIONE DEI PRESTITI: ERRORI, NONSENSE E MISTIFICAZIONI NELLO SCRITTO DI F. CACCIAFESTA

MODELING AMORTIZING LOANS: CONCEPTUAL ERRORS, NONSENSE, AND MYSTIFICATIONS IN F. CACCIAFESTA'S NOTE

Carlo Mari

Dipartimento di Economia
Università "G. D'Annunzio" di Chieti-Pescara
Departments of Economics
University "G. D'Annunzio" of Chieti-Pescara (Italy)

carlo.mari@unich.it

Graziano Aretusi

Dipartimento di Economia
Università "G. D'Annunzio" di Chieti-Pescara
Departments of Economics
University "G. D'Annunzio" of Chieti-Pescara (Italy)

graziano.aretusi@gmail.com

Viene presentata un'analisi critica dello scritto di F. Cacciafesta, pubblicato in questo stesso numero della Rivista, per evidenziarne i molteplici errori, i nonsense e le contraddizioni. Di tutti gli aspetti sottoposti a critica verranno fornite le confutazioni economico-finanziarie e matematiche.

Parole chiave: Regime semplice; regime composto; anatocismo; prestiti; debito residuo; piano d'ammortamento.

A critical analysis of F. Cacciafesta's note, published in this same issue of the Journal, is presented to point out its many errors, nonsense and contradictions. Economic, financial and mathematical refutations of all aspects subjected to criticism will be provided.

Keywords: *Simple interest; compound interest; anatocism; amortizing loans; outstanding balance; amortization schedule.*

1. INTRODUZIONE

L'impressione che abbiamo avuto, esaminando il lavoro del professor Cacciafesta è quella di uno scritto basato su una lettura parziale, troppo poco attenta e 'faziosa' dei due lavori in questione (Mari e Aretusi, 2018; 2019). Il risultato è un articolo in cui viene presentata una versione mistificata dei contenuti. Probabilmente in alcuni ambiti un atteggiamento simile può produrre dei benefici a vantaggio di una parte o di un'altra. In ambito scientifico, è destinato solo a generare trattazioni difficilmente sostenibili perché infarcite di errori, contraddizioni e *nonsense*. Di tutto questo daremo contezza puntuale.

Quello che si tenta di mettere in discussione sono i risultati e le conseguenze di una trattazione teorica generale che governa l'ammortamento dei prestiti, valida qualunque sia il regime finanziario adottato. È una trattazione che muove dai principi primi della Matematica Finanziaria che regolano le equivalenze finanziarie di importi esigibili in tempi diversi ed è presentata nel primo dei due lavori citati (Mari e Aretusi, 2018). Successivamente, Peccati ripropone la stessa modellizzazione (Peccati, 2020), pervenendo alle stesse relazioni matematiche, e lo fa indipendentemente da noi perché all'epoca non conosceva il nostro contributo. L'Autore sembra non conoscere il lavoro di Peccati.

Mettere in discussione, a distanza di cinque anni, contributi teorici vagliati e confermati dalla comunità scientifica appare estremamente arduo. Ma certamente non impossibile. Ed è con questo spirito che abbiamo letto il saggio, nel tentativo di individuare nuovi e significativi contributi al dibattito. Non abbiamo trovato nulla di tutto questo.

Al contrario, abbiamo trovato un articolo aprioristicamente 'di parte', ricco di errori e con un susseguirsi di affermazioni di cui non viene fornita alcuna dimostrazione, né un riferimento bibliografico. Da accettare per fede o come verità rivelata. Un modo di strutturare uno scritto decisamente singolare in ambito scientifico, specie nella matematica. Forse comprensibile se non si è in grado di produrre le prove di quello che si afferma perché ciò che si dovrebbe dimostrare è, di fatto, indimostrabile. «Riteniamo, per il seguito, preferibile riferirci ad un esempio concreto, anziché sviluppare una trattazione teorica» si legge nello scritto. Ha anche senso procedere in questo modo nell'intento di falsificare una teoria. Ma c'è bisogno di controesempi, non di esempi. Quelli prodotti dall'Autore risultano in perfetto accordo con la teoria e non fanno altro che confermare la modellizzazione proposta nei due lavori oggi sotto esame. Di esempi, più di uno, di controesempi, nessuno. Anche di questo renderemo conto nel seguito.

Una questione, sopra tutte, merita di essere approfondita da subito. Riguarda la definizione che abbiamo dato di debito residuo come 'miscela' di capitale e interessi per significare che il debito residuo ha un contenuto sia di interessi sia di capitale, proprio come ogni grandezza montante della Matematica Finanziaria. L'Autore modifica il termine 'miscela' in 'miscuglio', forse in senso dispregiativo. Miscela ci sembra più appropriato di 'miscuglio', anche perché miscuglio dà l'idea di confusione, di qualcosa di non ben determinato, invece della miscela di capitale e interessi di cui parliamo noi (Mari e Aretusi, 2019) si conosce esattamente sia il contenuto di interessi sia il contenuto di capitale: le proporzioni sono ben definite dal regime finanziario adottato. A confermare l'impressione di una lettura parziale e faziosa, l'Autore parla nell'Introduzione di «miscuglio tipico delle operazioni svolgentisi in interesse composto». Facciamo notare che il debito residuo è una miscela di capitale e interessi non solo nel regime dell'interesse composto ma in qualunque altro regime, anche in interesse semplice. E ci preme sottolineare che non si tratta di un risultato nuovo e a noi totalmente ascrivibile. Nel 2015 Olivieri e la coautrice Fersini avevano dimostrato che gli interessi corrisposti con il pagamento delle rate non coincidono con gli interessi maturati (Fersini e Olivieri, 2015). Gli interessi maturati e non corrisposti restano all'interno del debito residuo a comporre quella miscela di capitale e interessi che l'Autore vuole a tutti i costi mettere in discussione. Fersini e Olivieri lo hanno provato nel regime degli interessi composti attraverso un'elegante decomposizione di un prestito in una combinazione di prestiti elementari, cioè prestiti a rimborso unico, denominati, nello scritto che stiamo commentando, prestiti di tipo ZCB (Zero Coupon Bond, cioè titoli a cedola nulla). Tuttavia, essi hanno fornito un metodo quello, appunto, della decomposizione in prestiti elementari per provarlo in qualunque altro regime. Noi abbiamo seguito una via alternativa, facendo discender la dimostrazione dai principi primi della Matematica Finanziaria ed ottenendo, ovviamente, lo stesso risultato. È questo un punto cruciale della trattazione perché consente di dimostrare agevolmente la presenza di interessi generati da interessi negli ammortamenti in regime composto. L'Autore sembra non conoscere il lavoro di Fersini e Olivieri.

Molti sono gli studiosi che nei loro scritti intendono l'interesse composto come sinonimo di anatocismo. Lo fa, ad esempio, Levi che parla di "interesse composto (o anatocismo)" nel suo 'Corso di Matematica Finanziaria' (Levi, 1953). Lo fa lo stesso Cacciafesta che uguaglia, per sostanza e natura, l'interesse composto al concetto di "anatocismo, che è infatti - come ognun sa - consustanziale all'interesse composto" (Cacciafesta, 2019). Non comprendiamo quindi come l'Autore possa opporsi all'idea della presenza di un meccanismo anatocistico nel caso dei prestiti disegnati in regime composto, specie se si considera il fatto che qualche anno fa aveva titolato un Suo scritto: 'In che senso l'ammortamento francese (e non solo esso) dia luogo ad anatocismo'. La versione che ora propone, a distanza di alcuni anni, è sintetizzata nelle due seguenti affermazioni. La prima: «il regime composto, nel quale la curva del montante ha un andamento esponenziale, non può assumersi per modellizzare nessuna operazione di prestito reale». La seconda è relativa al regime nel quale, secondo l'Autore, si svolgono i prestiti reali: «quello dell'interesse semplice con pagamento periodico degl'interessi». La prima è per noi un'affermazione inaudita, nel senso che non l'abbiamo mai sentita né letta prima d'ora:

su tutti i testi di Matematica Finanziaria ci sono capitoli interi dedicati alla strutturazione delle operazioni finanziarie in regime composto, prestiti e ammortamenti compresi. Confessiamo che anche in merito alla seconda affermazione non siamo riusciti a trovare traccia alcuna di un sì nominato regime. Tuttavia, sulla base di un'attenta analisi semantica della denominazione, abbiamo prodotto una caratterizzazione analitica del montante. Dimostreremo (ebbene sì dimostreremo perché noi, a differenza dell'Autore, abbiamo questa 'cattiva' abitudine di dimostrare matematicamente le nostre affermazioni) che il «regime dell'interesse semplice con pagamento periodico degl'interessi» è un parente strettissimo del regime composto, coincide con il regime composto per tempi interi e ha una curva del montante che cresce più rapidamente della curva esponenziale. I prestiti disegnati in questo regime incorporano, ovviamente, lo stesso meccanismo anatocistico dei prestiti in regime composto, essendo i due regimi indistinguibili per tempi interi, e ne incrementano la componente anatocistica nel caso di risoluzione anticipata del contratto se questa avviene in un istante di tempo diverso da quello del pagamento delle rate.

L'Autore non vuole ammettere che l'unico modo per evitare meccanismi anatocistici è ricorrere all'utilizzo del regime semplice. La teoria esiste e discende dai principi primi della Matematica Finanziaria (Mari e Aretusi, 2018; Peccati, 2020). L'«interesse semplice ha un ambito di applicazione molto più particolare e limitato» si legge nell'Introduzione dell'Autore. È vero, ma ha un ambito di applicazione che la legge degli interessi composti non può e non potrà mai avere: quello di permettere di strutturare prestiti evitando la composizione degli interessi nel tempo. Sul regime semplice l'Autore commenta che il suo utilizzo è «inaccettabile dal punto di vista della logica economica». Smonteremo anche questa ennesima, erronea, affermazione, mostrando che le ragioni addotte dall'Autore per motivare l'inaccettabilità del regime semplice sono prive, appunto, di fondamenti economici e contraddette dalla realtà economica.

Queste sono le doverose e documentate premesse necessarie per ben intendere e collocare adeguatamente lo scritto del professor Cacciafesta. E per poter seguire appieno le nostre argomentazioni.

Con il fine di rendere conto puntualmente delle osservazioni critiche mosse ai nostri articoli, strutturemo il presente lavoro esattamente nello stesso modo in cui l'ha strutturato l'Autore, riproponendo la stessa ripartizione in paragrafi e adottando gli stessi titoli.

2. PREMESSE TERMINOLOGICHE

Decisamente singolare è l'incipit del secondo paragrafo in cui l'Autore commenta *ex abrupto* la caratterizzazione dell'interesse composto tratta da 'Lezioni di Matematica Finanziaria' di Giuseppe Ottaviani (1988). La riportiamo per completezza: *il regime finanziario dell'interesse composto è caratterizzato dalla proprietà che l'interesse che matura in ciascun periodo, al termine del periodo viene sommato al capitale per concorrere alla produzione dell'interesse nel periodo successivo*. L'Autore ha da dire: «una definizione di interesse composto assai discutibile (lo diciamo con un certo imbarazzo vista l'autorevolezza della fonte cui è attribuita). Nel regime composto, invece, tale operazione di 'somma' non avviene al termine del periodo (il quale, poi, di che durata sarebbe?) ma istante per istante». Sfortunatamente l'Autore non si rende conto che la definizione è così generale da non richiedere la specificazione della durata del periodo: vale indipendentemente dalla durata del periodo e vale anche nel limite di ampiezze temporali tendenti a 0 (istante per istante). Avrebbe fatto decisamente meglio a prendere il testo di Ottaviani aprirlo a pagina 20 e analizzare attentamente la profondità della definizione. A peggiorar una situazione già irreversibilmente compromessa, aggiunge: «Quello descritto nel precedente corsivo è il regime dell'interesse semplice con capitalizzazione periodica degl'interessi, ossia il regime che regola i contratti di conto corrente bancario. Avanziamo l'ipotesi che gli Autori, i quali hanno occasione di considerare solo quanto avviene nei particolari momenti subito successivi ai pagamenti, pensino in realtà ad esso». L'ipotesi è decisamente azzardata in quanto noi, a differenza dell'Autore, abbiamo ben chiaro in mente il regime degli interessi composti e le sue proprietà. L'argomento sembra comunque degno di essere approfondito, anche perché nell'Introduzione si legge: «Resta da lamentare che gli articoli ignorino del tutto il regime finanziario nel quale si svolgono i prestiti reali: quello dell'interesse semplice con pagamento periodico degl'interessi (non già loro capitalizzazione!)» E in effetti ignoriamo del tutto l'esistenza di questo regime. Tuttavia, il solo pensare che, a detta dell'Autore, proprio questo sia il regime che regola i prestiti reali, ci ha fatto consultare tutta una serie di libri di testo di Matematica Finanziaria alla ricerca delle prove della sua esistenza. L'esito della ricerca è stato totalmente negativo: nessun riferimento. E siamo risaliti anche molto indietro nel tempo, sino ai lavori di Bonferroni e alle dispute con Cantelli degli anni Venti e Trenta del secolo scorso (Bonferroni, 1938). Nessuna traccia. L'Autore non ci illumina con una definizione, né con una formula che ci possa indicare l'espressione analitica del montante. Ad esempio, nell'Appendice l'Autore non esita a riportare le formule del montante in interesse semplice e in interesse composto. Ma del «regime dell'interesse semplice con pagamento periodico degli interessi» non fa trapelare nulla. L'unica informazione che si deduce leggendo lo scritto è che il regime dell'interesse semplice con **pagamento** periodico degl'interessi è diverso dal regime degli interessi semplici con **capitalizzazione** periodica degli interessi. A detta dell'Autore, il primo regola i prestiti reali, il secondo i conti correnti. Ci piacerebbe davvero conoscere qualcosa in più, perché la trattazione teorica che abbiamo sviluppato può essere bene utilizzata anche con l'impiego di questo regime. Abbiamo allora provato a immaginare, pesando ogni termine dell'espressione «regime dell'interesse semplice con pagamento periodico degl'interessi», come sia analiticamente descrivibile il montante, visto che nell'articolo non c'è traccia della sua definizione. A rigore, dovrebbe essere,

(1) $$M(t) = (1+i)^{\lfloor t \rfloor}\big(1 + i(t - \lfloor t \rfloor)\big),$$

dove $\lfloor t \rfloor$ denota la parte intera di t. E, infatti, questa rappresentazione consente di mostrare facilmente l'equivalenza finanziaria tra un euro esigibile oggi e la successione degli importi $\mathbf{x} = \{i,i,\ldots,i,1+i(t-\lfloor t \rfloor)\}$ esigibili rispettivamente ai tempi $\mathbf{t} = \{1,2,\ldots,\lfloor t \rfloor,t\}$, successione di importi che rappresenta, appunto, il pagamento periodico degli interessi calcolati su un capitale unitario, capitale che verrà rimborsato al tempo t unitamente agli interessi maturati nell'ultimo intervallo [$\lfloor t \rfloor$,t] di ampiezza nonunitaria t-$\lfloor t \rfloor$. Per dimostrarlo, è sufficiente attualizzare il flusso **x** in questo regime e verificare che il valore attuale è esattamente 1. L'Equazione (1), dunque, riproduce la forma analitica del montante aderendo totalmente alla terminologia usata: interesse semplice con pagamento periodico di interessi.

Diverse e tutte rilevanti sono le implicazioni e le osservazioni d'obbligo. Le discuteremo immediatamente.

I. L'Equazione (1) mostra chiaramente che il regime dell'interesse semplice con **pagamento** periodico degli interessi implica la **capitalizzazione** periodica degli interessi. Infatti, osserviamo che per t=$\lfloor t \rfloor$ l'espressione coincide con il montante in capitalizzazione composta,

$$M(t) = (1+i)^t. \tag{2}$$

È quindi un regime anatocistico, in cui gli interessi vengono capitalizzati a generar interessi da interessi. E ciò che desta ancor più interesse, si perdoni il gioco di parole, è il fatto che nella produzione di interessi quest'ultimo regime supera addirittura la legge esponenziale. Risulta, infatti,

$$M(t) = (1+i)^{\lfloor t \rfloor}\big(1 + i(t - \lfloor t \rfloor)\big) > (1+i)^t, \quad t \neq \lfloor t \rfloor. \tag{3}$$

II. I prestiti disegnati in questo regime incorporano lo stesso meccanismo anatocistico dei prestiti in regime composto, essendo i due regimi indistinguibili per tempi interi, e ne incrementano la componente anatocistica nel caso di risoluzione anticipata del contratto se questa avviene in un istante di tempo diverso da quello del pagamento delle rate.

III. Del montante descritto dall'Equazione (1) esiste traccia nei testi di Matematica Finanziaria. Ne parla, ad esempio, Ottaviani in 'Lezioni di Matematica Finanziaria' (Ottaviani, 1988), nel paragrafo 'Capitalizzazione mista' a pagina 32.

IV. Muoviamo la quarta osservazione dalle parole dell'Autore: «il regime composto, nel quale la curva del montante ha un andamento esponenziale, non può assumersi per modellizzare nessuna operazione di prestito reale». È un affermazione che non abbiamo mai sentita, né letta in alcun testo di Matematica Finanziaria. Per questo, desideriamo tranquillizzare il lettore opponendo alla precedente la seguente affermazione: il regime composto, nel quale la curva del montante ha un andamento esponenziale, **può** essere utilizzata per modellizzare **tutte** le operazioni finanziarie reali che si vuole, prestiti compresi. Non capiamo quale possa essere la difficoltà nell'utilizzo dell'Equazione (2). È anche di facile implementazione numerica. Probabilmente la difficoltà che incontra l'Autore è la stessa che ha manifestato a proposito della caratterizzazione dell'interesse composto fornita da Ottaviani, cioè quella di conciliare rappresentazioni infinitesime e rappresentazioni finite. Ma questo è un problema di Analisi Matematica non di Matematica Finanziaria. Consigliamo, allora, di non fermarsi a pagina 20 del testo di Ottaviani e di leggere con attenzione le pagine 21 e 22 perché contengono un'elegante derivazione del montante in regime composto valida per qualunque valore reale dell'argomento temporale t. Aggiungiamo anche che nulla vieta di utilizzare il regime composto, il «regime dell'interesse semplice con pagamento periodico degli interessi» (in cui la cui curva del montante cresce più rapidamente della curva esponenziale) e qualsivoglia altro regime finanziario, interesse semplice incluso, per descrivere tutte le operazioni finanziarie che si vuole. Ad esempio, lo scambio di 100 euro al tempo 0 con 120 euro al tempo t = 2.5 anni può essere descritto come una operazione finanziaria al 7.57% annuo in regime composto, oppure all'8% annuo in regime semplice o, ancora, al 7.54% annuo nel «regime dell'interesse semplice con pagamento periodico degli interessi».

V. Sul regime composto, che a detta dell'Autore «non può assumersi per modellizzare nessuna operazione di prestito reale» facciamo notare che lo stesso Autore aveva contrapposto nell'Introduzione (e ribadito nell'Appendice) la seguente affermazione: «l'interesse composto fornisce all'economia (non solo alla finanza) il metodo valutativo universale».

Come poter definire sinteticamente quanto sin ora analizzato se non un (primo) insieme di errori, contraddizioni e *nonsense*? È anche da notare che l'Autore pospone spesso al sostantivo 'prestiti' l'aggettivo 'reali', come a voler significare che i prestiti si possano suddividere in due sottoinsiemi: i prestiti reali, appunto, e i prestiti 'immaginari', o non reali. Sul senso da attribuire all'aggettivo 'reale' indagheremo più avanti, in quanto l'Autore ne fa un uso smodato e privo, appunto, di senso reale.

Il secondo paragrafo merita ancora qualche attenzione per via del fatto che è proprio qui che si comincia a parlare più tecnicamente del piano d'ammortamento. Dopo averne fornito una breve descrizione, l'Autore sentenzia: «Esso non ha, pertanto, niente a che fare con eventuali scritture contabili private ... Sembra invece che gli Autori diano al termine questo secondo significato, e denominino 'piano di ammortamento esteso' quello che per noi è, e sarà in tutto questo scritto, il piano d'ammortamento *tout court*». È ben lontana da noi l'idea di attribuire un significato contabile ai numeri che compongono il piano d'ammortamento, tant'è che nei due scritti il termine contabile non compare mai, come anche con un cerca parole è facile verificare. Purtroppo, appare qui evidente che l'Autore non abbia letto attentamente i lavori di cui parla: il piano d'ammortamento 'esteso' viene definito così perché la tabella che lo rappresenta oltre a contenere le informazioni standard (importo delle rate, delle quote di capitale e delle quote interessi, debito residuo) fornisce ulteriori informazioni sulle caratteristiche del prestito a completamento del piano ammortamento tradizionale. Queste ulteriori informazioni sono presentate nelle tre colonne che affiancano il piano d'ammortamento standard. Altrimenti che piano esteso sarebbe! Le due parti della tabella sono separate da una barra verticale e non forniscono rappresentazioni alternative ma un'unica, più completa rappresentazione. La parte destra della tabella deve essere utilizzata come una sorta di lente di ingrandimento che aiuta a capire come si formano e da cosa sono costituiti gli importi che compaiono nel piano d'ammortamento tradizionale, quello cioè descritto nella parte sinistra della tabella. Per completezza riferiamo che le stesse informazioni aggiuntive sono riportate anche nei piani d'ammortamento presentati da Fersini e Olivieri (2015). L'Autore identifica, erroneamente o volutamente, il piano d'ammortamento con le ultime colonne, quelle poste a destra della barra per intenderci. Avremo modo di riparlarne.

Nel riquadro sottostante sono elencati le grandezze e i simboli che utilizzeremo (cfr. Appendice A).

R_k: importo della k-esima rata;
C_k: k-esima quota di capitale;
I_k: k-esima quota interessi, identifica gli interessi maturati nel periodo $[k - 1,k]$;
M_k: debito residuo all'epoca k dopo il pagamento della k-esima rata;
$S_k = R_k\, v(0,k)$: capitale iniziale rimborsato dalla rata R_k;
$I_k^p = R_k - S_k$: ammontare di interessi rimborsati (pagati) dalla rata R_k;
$D_{0,k} = \sum_{j=k+1}^{m} S_j$: ammontare di capitale iniziale non ancora rimborsato all'epoca k.

3. I PRESTITI "TIPO ZCB"

Desideriamo aprire questa sezione commentando un'affermazione singolare che è presente nel terzo paragrafo: «uno ZCB in interesse composto ha contenuto anatocistico difficilmente contestabile». Come ricordato nell'Introduzione, l'acronimo ZCB sta per *Zero Coupon Bond*. L'espressione «uno ZCB in interesse composto» è completamente priva di significato. Uno ZCB è un contratto che regola lo scambio di due importi monetari, uno esigibile immediatamente (nel caso di un contratto a pronti), l'altro, il rimborso, esigibile alla scadenza. Nell'esempio proposto dall'Autore lo scambio è tra 90 euro oggi a fronte di 100 tra due anni. Dunque, abbiamo difficoltà a immaginare uno ZCB in regime composto, o in regime semplice o in qualunque altro regime. Il contenuto anatocistico gli può essere conferito nel momento in cui viene dichiarato il tasso annuo dell'operazione. Se si dichiara che il tasso è del 5.56% (interessi semplici), l'operazione non presenta composizione di interessi. Se, per contro, si dichiara che il tasso è del 5.41% (interessi composti) l'operazione sottintende la composizione di interessi nel tempo. È difficile anche concordare con l'Autore che prestiti di tipo ZCB siano pure «creazioni teoriche». Nella realtà dei mercati finanziari sono molte le aziende e gli Stati sovrani che si indebitano ricorrendo a prestiti ZCB. Ma anche se fossero solo costruzioni teoriche, visto che comunque sono dei casi particolari di più complesse operazioni di prestito, necessitano di un inquadramento teorico di riferimento che deve essere lo stesso dei prestiti più generali. E questo inquadramento teorico esiste nella letteratura finanziaria. La trattazione generale dell'ammortamento dei prestiti muove dai principi primi della Matematica Finanziaria che regolano le equivalenze finanziarie di importi esigibili in tempi diversi. È stata sviluppata indipendentemente da Mari e Aretusi (2018) e da Peccati (2020) a cui rimandiamo per ogni approfondimento. Tuttavia, l'Appendice A alla fine del presente lavoro riporta lo schema di riferimento essenziale per comprendere la teoria di base e riprodurre i piani d'ammortamento presentati nel testo.

Di seguito sono rappresentati i corretti piani di ammortamento estesi di un prestito ZCB a 3 anni per l'importo S = 100 da rimborsare in regime composto al tasso annuo i = 10% (Tabella 1) e in regime semplice sempre al tasso annuo i = 10% (Tabella 2). L'Autore ha presentato di questi piani d'ammortamento una versione parziale e confusa nel terzo paragrafo: parziale perché non presenta la parte sinistra dei nostri piani estesi; confusa perché l'Autore inserisce, di propria iniziativa, l'ultima colonna che noi non abbiamo mai incluso nel piano.

k	R_k	C_k	I_k	M_k	S_k	I_k^p	$D_{0,k}$
0	0	0	0	100	0	0	100
1	0.00	-10.00	10.00	110	0.00	0.00	100
2	0.00	-11.00	11.00	121	0.00	0.00	100
3	133.10	121.00	12.10	0	100.00	33.10	0

Tabella 1 - Ammortamento di un prestito ZCB nel regime degli interessi composti.

k	R_k	C_k	I_k	M_k	S_k	I_k^p	$D_{0,k}$
0	0	0	0	100	0	0	100
1	0.00	-10.00	10.00	110	0.00	0.00	100
2	0,00	-10.00	10.00	120	0.00	0.00	100
3	130.00	120.00	10.00	0	100.00	30.00	0

Tabella 2 - Ammortamento di un prestito ZCB nel regime degli interessi semplici.

Con riferimento alla Tabella 1, è immediato notare che gli interessi maturati, I_k, e non rimborsati incrementano il debito residuo. Con tutta evidenza, dunque, il debito residuo risulta essere una miscela di capitale e interessi. Le quote interessi, calcolate secondo lo schema generale d'ammortamento (si veda l'Appendice A),

$$I_k = iM_{k-1} = i(1+i)^{k-1}S, \tag{4}$$

mostrano chiaramente un meccanismo anatocistico di generazione di interessi da interessi. Anche nel caso dell'ammortamento a interessi semplici, riportato nella Tabella 2, gli interessi maturati, I_k, e non pagati incrementano il debito residuo. E anche in questo caso il debito residuo si presenta come una miscela di capitale e interessi. La differenza profonda che fa sì che in interessi semplici si eviti il meccanismo di composizione degli interessi nel tempo, è che in questo regime le quote interessi, calcolate secondo lo schema generale d'ammortamento (si veda l'Appendice A), sono date da

$$I_k = \frac{iM_{k-1}}{1+i(k-1)} = iS, \tag{5}$$

e non presentano composizione di interessi nel tempo. La Tabella 2 mostra chiaramente che le quote interessi in ogni periodo sono costanti e pari al 10% del capitale inizialmente erogato. Nel regime semplice, infatti, la quota interessi è calcolata sul valore attuale del debito residuo: l'attualizzazione del debito residuo rimuove il contenuto di interessi dalla miscela e fa sì che il calcolo degli interessi si faccia sempre sul capitale iniziale.

Enfatizziamo, qualora ce ne fosse bisogno, che l'Equazione (5) non è stata introdotta artificiosamente o surrettiziamente, come vuole far credere l'Autore, ma discende dall'impostazione teorica di fondo (Mari e Aretusi, 2018; Peccati, 2020). È una conseguenza della relazione generale che regola la formazione degli interessi secondo l'Equazione (A.12): nel regime composto produce lo schema descritto dall'Equazione (4), nel regime semplice quello descritto dall'Equazione (5).

Le tabelle presentate dall'Autore mostrano sola la parte di destra delle Tabelle 1-2 (con l'aggiunta arbitraria dell'ultima colonna) e, di conseguenza, non rappresentano alcun piano d'ammortamento. Nonostante questo, è apprezzabile il commento (sul quale concordiamo pienamente) che: «È del tutto evidente che interessi da interessi sono presenti nel caso della tabella 1, non ce ne sono in quello della tabella 2». L'Autore concorda, dunque, sul fatto che il piano d'ammortamento in regime composto dei prestiti ZCB mostra generazione di interessi da interessi, ma liquida l'argomento come del tutto irrilevante visto che tali prestiti non si possono ritenere «reali». A noi l'argomento sembra, al contrario, decisamente rilevante come, del resto, è sembrato rilevante al team di autori (di cui fa parte lo stesso Cacciafesta) del rapporto AMASES 'Anatocismo nei piani di ammortamento standardizzati tradizionali' (Pressacco et al., 2022) che, per evitare di incappare in situazioni di evidente «illegittimità», impongono artificiosamente una condizione di 'chiusura forte' sulle quote di capitale, richiedendo la positività in senso stretto di tutte le quote di capitale, specificando che ogni volta che almeno una delle quote di capitale dovesse risultare strettamente negativa (come, ad esempio, accade nei prestiti ZCB, e non solo nei prestiti ZCB ma anche in tutti i prestiti in cui almeno una rata di rimborso è strettamente minore della rispettiva quota interessi), si ha produzione di interessi da interessi. Ovviamente la nostra posizione in merito è ben diversa da quella contenuta nel rapporto AMASES. Come abbiamo, infatti, mostrato nei lavori oggi in esame e come mostreremo nella sezione successiva, tutti i prestiti in regime composto (e, consequenzialmente, anche nel «regime semplice con pagamento periodico di interessi») contengono un meccanismo anatocistico di composizione degli interessi nel tempo.

4. I PRESTITI "IN INTERESSE COMPOSTO"

Nel quarto paragrafo l'Autore discute di ammortamenti in regime composto, considerando il caso generale di un prestito per l'importo S al tempo 0 da rimborsare mediante il pagamento di una successione di rate non negative $\boldsymbol{r} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ con $R_m > 0$, esigibili ad intervalli di tempo regolari $\boldsymbol{t} = \{1, 2, \ldots, m\}$, soddisfacenti la condizione di equilibrio finanziario (leggasi anche equità),

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{(1+i)^k}. \tag{6}$$

Due sono i nuovi esempi presentati dall'Autore, entrambi in regime composto al 10%. Il primo prevede il rimborso dell'importo S = 296.84 mediante una successione di tre rate, $\boldsymbol{r} = \{110,120,130\}$, esigibili ai tempi $\boldsymbol{t} = \{1,2,3\}$. Il secondo è un prestito di tipo *bullet* e prevede il rimborso dell'importo S = 100 con una successione di tre rate, $\boldsymbol{r} = \{10,10,110\}$, ai tempi $\boldsymbol{t} = \{1,2,3\}$. Per ognuno di questi prestiti l'Autore presenta due diversi schemi di ammortamento: quello che ritiene essere il nostro piano esteso (riportando, erroneamente o volutamente, solo la parte destra dell'ammortamento esteso con la confusione che gli abbiamo già riconosciuto nella sezione precedente) e uno schema che definisce «non anatocistico». Appare doveroso chiedersi quale fine abbia fatto l'evidente contenuto anatocistico riconosciuto dall'Autore nei prestiti di tipo ZCB, visto che, in generale, un prestito può sempre essere decomposto in una somma di prestiti ZCB. In riferimento al caso generale presentato in apertura di sezione, infatti, il prestito iniziale può essere visto come la somma di m prestiti di tipo ZCB con valori di rimborso R_1 al tempo 1, R_2, al tempo 2, ..., e R_m al tempo m: "Il fenomeno del calcolo degli interessi sugli interessi riguarda sicuramente ciascuno degli m debiti in cui è possibile decomporre il prestito iniziale, ma riguarda anche l'unico debito di importo iniziale S, risultando essere la somma degli m debiti" (Fersini e Olivieri, 2015). Per cercare di svincolarsi da questa evidente contraddizione l'Autore osserva: «il punto di vista scelto dagli Autori va giudicato del tutto artificioso. Invero, un prestito reale non è mai, con una sola importante ma solo apparente eccezione, descritto dalla successione delle rate che il debitore deve pagare. Le rate sono calcolate a posteriori, una volta noti l'ammontare, la durata, il tasso corrispettivo e la frequenza dei pagamenti». Il discutibile senso dell'osservazione è che non si deve strutturare un prestito a partire dalla successione delle rate di rimborso, ma dalla successione delle quote di capitale e delle quote interessi; solo successivamente le due quantità possono essere sommate a determinare gli importi delle rate. È decisamente un punto di vista singolare: quello suggerito è uno dei molti possibili modi equivalenti per strutturare un prestito. Si pensi, ad esempio, ad un agente economico che desidera rimborsare un prestito con rate variabili nel tempo per adeguarle alle proprie capacità di produzione di reddito. Probabilmente il modo più immediato di farlo è ragionare in termini di rate. Ma, lo ripetiamo, sono modalità equivalenti. Infatti, anche seguendo il metodo suggerito dall'Autore, una volta noti gli importi delle rate (sommando quota capitale e quota interessi) si può sempre effettuare la decomposizione in prestiti ZCB, *a là* Fersini e Olivieri, e far riemergere la componente anatocistica del prestito. Su questo aspetto, foriero di ulteriori singolari argomentazioni torneremo in seguito.

Se analizziamo in dettaglio lo schema «non anatocistico» prodotto dall'Autore, scopriamo che altro non è che lo schema d'ammortamento in regime composto tradizionale presente in tutti i testi di Matematica Finanziaria e anche nella parte sinistra del nostro piano d'ammortamento esteso (che per qualche oscuro motivo, forse per un tentativo di mistificazione, non viene mai riportata). Incredibile non averlo notato. Riproponiamo, per completezza, i corretti piani d'ammortamento estesi in modo tale che il lettore possa verificare facilmente. Ci domandiamo quale livello di attenzione abbia posto l'Autore nell'analizzare i due lavori oggi in esame. I controesempi sono importanti nella matematica al fine di falsificare un'impostazione teorica. Ma se l'esempio riproduce esattamente quello che la teoria prevede, che controesempio sarebbe? Solo una prova ulteriore che la teoria funziona.

k	R_k	C_k	I_k	M_k	S_k	I_k^p	$D_{0,k}$
0	0	0	0	296.84	0	0	296.84
1	110	80.32	29.68	216.53	100.00	10.00	196.84
2	120	98.35	21.65	118.18	99.17	20.83	97.67
3	130	118.18	11.82	0	97.67	32.33	0

Tabella 3 - Ammortamento nel regime degli interessi composti.

k	R_k	C_k	I_k	M_k	S_k	I_k^p	$D_{0,k}$
0	0	0	0	100	0	0	100
1	10	0	10	100	9.09	0.91	90.91
2	10	0	10	100	8.26	1.74	82.64
3	110	100	10	0	82.64	27.36	0

Tabella 4 - Prestito *bullet*.

Come è facile verificare, i piani di ammortamento da noi riportati sono costruiti utilizzando la trattazione generale presentata nell'Appendice A. E come tali mostrano un meccanismo anatocistico. Lo si può dimostrare anche senza ricorrere alla decomposizione in prestiti ZCB. È sufficiente considerare la relazione seguente (presentata nell'Appendice A e valida qualunque sia il regime adottato) che descrive il debito residuo,

(7) $$M_k = \frac{1}{v(0,k)} \sum_{j=k+1}^{m} R_j\, v(0,j), \quad k = 1,2,\cdots,m-1,$$

con $M_m = 0$. In tale relazione l'importo di ogni rata è attualizzato dalla data di esigibilità al tempo $t = 0$: il processo di attualizzazione rimuove la componente di interessi, I_j^p, dall'importo di ciascuna rata, R_j. Successivamente, l'importo ottenuto sommando i valori attuali delle $m - k$ rate non ancora corrisposte all'epoca k è capitalizzato dal tempo $t = 0$ all'epoca k: il processo di capitalizzazione include nel debito residuo gli interessi maturati nell'intervallo temporale $[0,k]$. Appare del tutto evidente, dunque, che il debito residuo sia costituito da una miscela di capitale e interessi. Discende, lo sottolineiamo, da principi primi e vale in qualunque regime, interesse semplice compreso. Le quote interessi, calcolate sulla base della trattazione presentata in Appendice A, sono date da

(8) $$I_k = iM_{k-1} = i(1+i)^{k-1}D_{0,k-1},$$

e mostrano una componente anatocistica immediatamente quantificabile,

(9) $$CA_k = iM_{k-1} - iD_{0,k-1} = i[(1+i)^{k-1} - 1]D_{0,k-1},$$

che coincide esattamente con la componente anatocistica calcolata da Fersini e Olivieri (2015) attraverso la decomposizione in prestiti elementari. Ogni volta che gli interessi maturati sono superiori agli interessi pagati, cioè quando $I_k > I_k^p$, la differenza di interessi, $I_k - I_k^p$, rimane nel debito residuo (Fersini e Olivieri, 2015) ad originare la miscela di capitale e interessi (Mari e Aretusi, 2019). Il piano d'ammortamento esteso è stato pensato e costruito con uno scopo preciso, quello di consentire all'utilizzatore di avere a disposizione sinotticamente tutte le informazioni necessarie a comprendere appieno il processo di formazione e di pagamento degli interessi.

Per chi avesse ancora dei dubbi in merito alla presenza di interessi nel debito residuo, l'aneddoto raccontato nel riquadro seguente ne propone un'ulteriore caratterizzazione.

> Un individuo, rivolgendosi ad un impiegato dell'Istituto a cui ha chiesto un prestito per l'importo S = 296.84 in regime composto al 10% da rimborsare secondo lo schema descritto nella Tabella 3, osserva: "la prima rata ha una quota interessi elevata e ho visto dal piano d'ammortamento che il debito residuo dopo il pagamento della prima rata ammonta a 216.53. Vi faccio una proposta, evito di pagare la prima rata e voi, invece di erogarmi un prestito di 296.84, mi darete 216.53". L'impiegato che ha letto lo scritto di un professore universitario di cui non ricorda il nome, ma di cui ricorda perfettamente l'affermazione che il debito residuo non contiene interessi ed è puro capitale, accetta la proposta concedendo il prestito per l'ammontare di 216.53 a fronte del pagamento delle rate R_2 = 120 e R_3 = 130. Appena il direttore viene a conoscenza dell'episodio non esita a licenziare il dipendente: "ma come hai potuto commettere un errore simile? Sai a quanto ammonta il valore delle prestazioni del cliente? Te lo dico io: 196.84. Tanto è il valore attuale delle due rate di rimborso. Questo è l'importo che avresti dovuto erogare. Tu, invece, gli hai elargito il 10% in più, che è l'ammontare degli interessi maturati e non pagati nel primo anno ($I_1 - I_1^p$ = 19.68). Infatti 196.84 + 19.68 = 216.53". "Ma allora il debito residuo non è puro capitale", esclama disorientato il dipendente.

Decisamente singolare la parte finale del quarto paragrafo: «Escluso il caso degli ZCB, diremmo che la anatocisticità non sia nella realtà, ma vi sia introdotta dal modello scelto per rappresentarla: modello al tempo stesso improprio (perché confonde il capitale con gli interessi) e rozzo (perché ignora la genesi delle rate)». Il modello di cui parla l'Autore e di cui non riesce a trovare una falsificazione teorica né numerica, è un modello che discende da principi finanziari di base e, ovviamente, riproduce perfettamente gli ammortamenti in regime composto. Quindi è certamente un modello che non confonde capitale e interessi né, tanto meno, la genesi delle rate. Sarebbe come dire che è improprio e rozzo il modello di ammortamento standard presente in tutti i testi di Matematica Finanziaria, essendo tale modello un caso particolare della trattazione presentata. In più, identifica con chiarezza il processo di genesi degli interessi sugli interessi e non introduce alcuna anatocisticità, come dimostra il fatto che il modello correttamente rileva la presenza di interessi anatocistici nei prestiti in regime composto e non li rileva nei prestiti in regime semplice. Al contrario, l'analisi dell'Autore appare superficiale, pretestuosa, e, come abbiamo avuto modo di mostrare, infarcita di errori, contraddizioni e *nonsense*.

5. PRESTITI "IN INTERESSE SEMPLICE"

Nel quinto paragrafo l'Autore disquisisce di prestiti in interesse semplice, facendo riferimento al caso di un prestito per l'importo S al tempo 0 da rimborsare mediante il pagamento di una successione di rate non negative $\boldsymbol{r} = \{R_1,R_2,\ldots,R_m\}$ con $R_m>0$ esigibili ad intervalli di tempo regolari $\boldsymbol{t} = \{1,2,\ldots,m\}$, soddisfacenti la condizione di equilibrio finanziario,

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{1+ik}. \tag{10}$$

L'Autore fa notare che la «non scindibilità dell'interesse semplice fa sì che non si possa pensare, come si è fatto nel par. 4, al montante prodotto dal capitale S al passare del tempo». Per quale motivo? E cosa c'entra la scindibilità? Sono le ennesime affermazioni di cui non viene fornita alcuna spiegazione. E aggiunge: «Non sembra ora possibile ragionare altro che in termini di un portafoglio di prestiti tipo ZCB». Per quale motivo? A questo punto corre l'obbligo di richiamare il lettore su un fatto che si palesa incontrovertibilmente: l'Autore ha forse letto solo qualche frammento dei lavori dei quali, senza cognizione di causa, discute. Nel primo dei due (Mari e Aretusi, 2018), lo ricordiamo, è contenuta una modellizzazione generale, la stessa riproposta da Peccati (2020), che vale qualunque sia il regime finanziario adottato. Vale, quindi, anche in interessi semplici. Né noi né Peccati facciamo riferimento alcuno alla proprietà di scindibilità, in quanto essa non svolge alcun ruolo nella trattazione. La costruzione teorica vale, dunque, per leggi scindibili e leggi non scindibili. L'Autore dello scritto ignora questi contributi e parla senza avere una conoscenza adeguata delle questioni che affronta. Inoltre, facciamo notare che se, come sostiene l'Autore, lo schema d'ammortamento funziona mediante la decomposizione in ZCB, deve anche funzionare nel caso generale, essendo quest'ultimo riconducibile ad una somma di prestiti ZCB.

Successivamente, l'Autore discute l'esempio di un prestito per l'importo S = 300 da rimborsare mediante una successione di tre rate, $\boldsymbol{r}$ = {110,120,130}, esigibili ai tempi $\boldsymbol{t}$ = {1,2,3}, in regime semplice al 10%. Di questo prestito mostra la (ormai nota) versione mistificata del piano d'ammortamento esteso. Per completezza e al fine di consentire al lettore di seguire la discussione, nella Tabella 5 riportiamo il corretto piano d'ammortamento esteso in regime semplice.

k	R_k	C_k	I_k	M_k	S_k	I_k^p	$D_{0,k}$
0	0	0	0	300	0	0	300
1	110	80	30	220	100	10	200
2	120	100	20	120	100	20	100
3	130	120	10	0	100	30	0

Tabella 5 - Ammortamento nel regime degli interessi semplici.

A commento della propria difficoltà nel vedere il piano d'ammortamento di Tabella 5 come frutto di un'impostazione teorica di fondo e, probabilmente, non sapendo come giustificare la meraviglia di fronte ad un ammortamento in cui non si generano interessi su interessi, l'Autore commenta: «Gli Autori vogliono a tutti i costi, sembra, evitare di tenere il debito distinto per componenti. Per non 'sovradimensionare' il pagamento a titolo d'interessi, essi ricorrono all'espediente di scontare il loro (indistinto) debito residuo al tempo iniziale del prestito dichiarando (I, pag. 32 e segg.) che in questo modo si evita di includere gli interessi sugli interessi nelle rate di rimborso del mutuo perché il calcolo del valore attuale depura il debito residuo dagli interessi corrisposti nei periodi di tempo precedenti. La frase è invero oscura, perché interessi corrisposti sono stati, appunto, pagati, e non sono più, quindi, presenti». Con buona pace dell'Autore, e come discusso nella precedente sezione, l'Equazione (A.2) mostra il contrario: gli interessi sono ben presenti nel debito residuo anche nel regime semplice e l'espediente di cui parla, di scontare il debito residuo al tempo iniziale del prestito, non è certo un espediente bensì una conseguenza della trattazione teorica. Essa impone che, nel caso del regime semplice, gli interessi maturati **devono** essere calcolati secondo la formula seguente (si veda l'Appendice A)

(11) $$I_k = \frac{iM_{k-1}}{1+i(k-1)} = iD_{0,k-1}.$$

L'Equazione (11) mostra chiaramente l'assenza del fenomeno anatocistico in quanto gli interessi che maturano in ogni periodo vengono calcolati sul capitale iniziale non estinto, cioè $I_k = iD_{0,k-1}$, e non sul debito residuo, $I_k = iM_{k-1}$, come nel regime composto. La frase appare oscura all'Autore perché non conosce la teoria sottostante. È ovvio che gli interessi corrisposti sono stati pagati (ma questa è una tautologia), quello che l'Autore non valuta appieno è che gli interessi corrisposti non coincidono con gli interessi maturati, $I_k^p \neq I_k$. Esattamente come nel regime composto, ogni volta che gli interessi maturati sono superiori agli interessi pagati, $I_k > I_k^p$, la differenza di interessi, $I_k - I_k^p$, rimane all'interno del debito residuo. A tal proposito facciamo notare che l'aneddoto raccontato nel riquadro della sezione precedente può essere riproposto anche nel caso dell'interesse semplice e invitiamo il lettore a farlo, magari riferendosi all'ammortamento descritto nella Tabella 5. Se il debito residuo non venisse attualizzato si genererebbero interessi su interessi: discende dalla trattazione teorica, non è un espediente come, per difetto di conoscenza, è sembrato all'Autore. Tutto ciò, per fortuna ha tratto in inganno solo l'Autore e non certo il Tribunale di Cremona.

La parte finale del quinto paragrafo è un susseguirsi di frasi prive di senso economico e sintetizzabili nell'affermazione seguente: un agente economico che investe con strutture di tassi decrescenti se «non è particolarmente pessimista, il suo comportamento va giudicato del tutto irrazionale». Una prima osservazione è d'obbligo: secondo l'Autore, un investitore particolarmente pessimista che investe con strutture di tassi decrescenti è razionale, se non è particolarmente pessimista è del tutto irrazionale! Per comprendere appieno la portata di questo ennesimo *nonsense* si pensi alla teoria della struttura per scadenza dei tassi di interesse e ai modelli interpretativi dei suoi movimenti nel tempo. Si pensi alle forme funzionali assunte nel tempo dalla curva dei rendimenti, con andamenti crescenti, decrescenti, non monotòni. Non c'è nulla di intrinsecamente irrazionale in strutture di rendimenti decrescenti (si veda, ad esempio, De Felice e Moriconi (1991) per una discussione delle principali 'ipotesi di aspettativa' sulla struttura a termine dei tassi di interesse). Si pensi ad agenti economici, perfettamente razionali, che in determinate epoche hanno prestato fondi a tassi decrescenti. Per l'Autore tutto questo è «manifestamente assurdo». Cosa direbbe l'Autore, allora, di agenti economici che sino a qualche tempo fa investivano a tassi negativi. O dei prestiti concessi dalle banche a tassi molto vicini a 0.

Concordiamo, invece, totalmente con l'Autore quando afferma che il prestito precedente di cui l'ammortamento è presentato nella Tabella 5, può essere visto anche come un prestito in interesse composto al tasso del 9.42%. Riportiamo di seguito il piano d'ammortamento esteso in regime composto.

k	R_k	C_k	I_k	M_k	S_k	I_k^p	$D_{0,k}$
0	0	0	0	300	0	0	300
1	110	81.75	28.25	218.25	100.53	9.47	199.47
2	120	99.44	20.56	118.81	100.23	19.77	99.24
3	130	118.81	11.19	0	99.24	30.76	0

Tabella 6 - Ammortamento nel regime degli interessi composti.

Ora, se lo stesso prestito, cioè lo scambio tra il capitale iniziale $S = 300$ e la successione delle rate $\boldsymbol{r} = \{110,120,130\}$, può essere visto come un prestito a interesse semplice al 10% o come un prestito a interesse composto al 9.42%, salta l'affermazione dell'Autore sui prestiti in regime semplice: «prestiti come quelli sopra definiti, non esistono nella realtà». È come dire: il prestito, cioè lo scambio tra il capitale mutuato e il flusso delle rate di rimborso, è reale se valutato in regime composto al 9.42%, cessa di essere reale se valutato in regime semplice al 10%. Davvero singolare. Per fortuna la realtà non è come appare all'Autore. Ovviamente, il piano d'ammortamento in regime composto al 9.42% è diverso dal piano d'ammortamento in regime semplice per la presenza degli interessi sugli interessi, come è immediato verificare confrontando la Tabella 5 con la Tabella 6.

L'Autore contraddice sé stesso anche in riferimento alle connessioni tra l'impiego della legge degli interessi semplici e gli investimenti a tassi decrescenti. Qui il tasso è costante e pari al 9.42%. Tuttavia utilizza l'esempio per sottolineare una verità: l'impossibilità di stabilire il regime dalla successione degli importi che definiscono lo scambio. Noi concordiamo perfettamente. Siamo meno d'accordo sulla conclusione che ne trae e cioè che questa impossibilità «indica, a nostro parere, che l'idea di ricostruire un prestito a partire dalle rate d'ammortamento (idea alla base degli articoli che commentiamo) sia non solo artificiosa, ma anche di dubbie capacità di successo». Facciamo notare al lettore che l'idea di individuare la legge finanziaria sottostante un'operazione di prestito a partire dalle rate di rimborso non è l'idea alla base dei lavori oggi in esame. L'idea alla base dei nostri lavori è esattamente l'idea **inversa**, sintetizzabile nel modo seguente: data una legge finanziaria, qualunque essa sia, è sempre possibile e in modo univoco, strutturare un prestito e costruire il suo piano d'ammortamento. Ci chiediamo quale attenzione abbia posto l'Autore nella lettura dei lavori che si permette di discutere. Probabilmente è un ulteriore tentativo di mistificazione. Tuttavia, desideriamo ringraziare l'Autore per aver posto alla nostra attenzione un problema che appare decisamente interessante e che affronteremo nella sezione successiva: quello dell'individuazione della legge finanziaria sottostante un contratto di prestito a partire dalla specificazione della 'regola' di calcolo delle quote interessi.

6. L'AMMORTAMENTO FRANCESE: AMBIGUITÀ

Tre sono le questioni che l'Autore discute nel sesto paragrafo, definendole «ambiguità». Mostreremo che 'all'apparir del vero' nessuna di queste può essere ritenuta tale. Per poter affrontare appieno la prima «ambiguità» occorre premettere che nel rapporto AMASES, cofirmato dall'Autore stesso, si fa riferimento a due tipologie di ammortamento: 'PAST (Piano d'Ammortamento Standardizzato) con *input* rate' e 'PAST con *input* quote di capitale'. Nello strutturare un prestito secondo la prima delle due tipologie, tra le rate di *input* e il capitale erogato viene imposta la condizione di equilibrio finanziario in regime composto,

$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{(1+i)^k}. \tag{12}$$

Nella seconda tipologia, invece, il prestito viene strutturato a partire dalle quote di capitale e dalle quote interessi. L'idea è la seguente: assegnate le quote di capitale di un prestito per l'importo S, se si conviene di calcolare le quote interessi come $I_k = iM_{k-1}$ a partire da $M_0 = S$, e di determinare le rate sommando quote di capitale e quote interessi, è possibile pervenire allo stesso piano d'ammortamento ottenuto in regime composto al tasso i, senza dover fare riferimento esplicito alla legge degli interessi composti. Di questo convincimento è, ovviamente, l'Autore che, in riferimento alla relazione di equilibrio in regime composto descritta dall'Equazione (12), osserva che «la evidente presenza della legge dell'interesse composto, ha fatto nascere gravi dubbi sulla accettabilità del risultato che essa fornisce, e continua a farne nascere. In realtà, e come pure si è anticipato, da quella formula si può del tutto prescindere: le due condizioni di costanza della rata, e di servizio degl'interessi che azzeri ogni periodo tutti quelli durante esso generati, portano allo stesso risultato di quell'equazione, senza ricorso ad alcuna legge finanziaria». Al lettore attento non sarà di certo sfuggito il fatto che in precedenza l'Autore aveva identificato nel regime «finanziario dell'interesse semplice con pagamento periodico degli interessi» il regime che regola i prestiti reali. Ora apprendiamo che si era sbagliato e che i prestiti e gli ammortamenti dei prestiti si possono costruire senza ricorso ad alcuna legge finanziaria. A sostegno ulteriore del proprio pensiero, l'Autore sottolinea in una nota che all'Equazione (12) si fa ricorso per una «semplice ragione di comodità di calcolo». È come dire, per disegnare i prestiti e i relativi piani d'ammortamento esiste un 'ordine naturale' che non fa riferimento ad alcuna legge finanziaria, e il fatto che questo ordine naturale conduca univocamente all'Equazione (12) è del tutto accidentale. Credo che non sia facile non provare stupore di fronte ad affermazioni di questa portata. Anche perché nella matematica nulla accade accidentalmente. Proviamo ad analizzare più in dettaglio l'osservazione. L'affermazione sul servizio del debito (non degli interessi, ma ormai non ci stupiamo più) è decisamente vaga se non si specifica la modalità di calcolo degli interessi, cioè se non si specifica la 'regola' finanziaria impiegata per quantificare le quote interessi. Probabilmente l'Autore ha in mente la regola di calcolo 'naturale' $I_k = iM_{k-1}$, come è anche riportato nel rapporto AMASES, altrimenti non si potrebbe pervenire all'Equazione (12). Purtroppo l'Autore è ignaro del fatto che a marchiare a lettere di fuoco l'approccio che sta proponendo è proprio la regola 'naturale' sulla formazione degli interessi: $I_k = iM_{k-1}$. Tale regola **individua univocamente il regime degli interessi composti**. Altro che irrilevanza del regime. E questo, ovviamente, spiega la concordanza con l'Equazione (12). La dimostrazione è riportata nell'Appendice B.

La seconda «ambiguità» ha a che fare con la relazione di equivalenza finanziaria in interessi semplici,

(13)
$$S = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{1 + ik}.$$

L'Autore sostiene che tale relazione «ha la sostanza di una vera equivalenza solo in casi sporadici: un po' come solo raramente un biglietto di una lotteria equivale al primo premio. È difficile accettare l'idea che quella formula venga assunta a base di una tipologia di contratto che si vorrebbe standard. Essa esprime un'equivalenza tra il prestito e qualche cosa che non c'è; e non ha molto senso dire che il prestito (il diritto ad incassare il flusso) deve avere lo stesso costo (S) di qualcosa che non esiste». Ci limitiamo qui a commentare, del resto l'affermazione si presenta in assoluta autoevidenza come un insieme di parole unite tra di loro a generare *nonsense*, che nel paragrafo precedente l'Autore aveva sottolineato come uno stesso prestito poteva essere visto come un prestito a interesse semplice ad un determinato livello del tasso, oppure come un prestito a interesse composto ma a un tasso diverso (univocamente determinato, aggiungiamo noi). Ora lo stesso prestito, cioè lo stesso flusso delle rate di rimborso e lo stesso capitale mutuato, esiste se valutato in regime composto, cessa di esistere in regime semplice! È veramente difficile attribuire un qualche senso ad affermazioni che un senso non hanno.

La terza «ambiguità» che l'Autore affronta riguarda ancora il regime semplice. In particolare, l'Autore fa osservare, peraltro correttamente, che se la condizione di equilibrio finanziario di un prestito in interesse semplice viene imposta in un istante di tempo generico, anziché al tempo iniziale, si ottengono piani di rimborso differenti. E visto che si possono considerare infinite epoche in cui fissare la condizione di equivalenza, si possono ottenere infinite soluzioni per l'importo della rata nel caso dell'ammortamento francese: «Ciascuna scelta dà luogo ad un valore diverso per la rata. Si può essere d'accordo che la condizione di equivalenza iniziale sia la più naturale, e che le molte intermedie siano piuttosto artificiose; ma non vi è unanimità al riguardo» (aggiungiamo noi la citazione d'obbligo, Annibali et al. (2017)). Facciamo notare che, sulla base di argomentazioni finanziarie di base, è possibile escludere tutte le epoche tranne una, quella iniziale. Il ragionamento procede in questo modo. Si consideri l'importo S al tempo 0. Ad interesse semplice, l'importo equivalente dovuto al tempo $t > 0$ è dato da

$$S_t = S(1 + it). \tag{14}$$

Se l'equivalenza finanziaria è imposta al tempo $T \geq 0$, si ottiene

$$S_t = \begin{cases} S(1 + iT)/\big(1 + i(T - t)\big) & T \geq t \\ S(1 + iT)\big(1 + i(t - T)\big) & 0 \leq T < t. \end{cases} \tag{15}$$

Infatti, quando $T \geq t$, l'importo ottenuto capitalizzando linearmente S_t dal tempo t al tempo T deve essere uguale all'importo ottenuto capitalizzando linearmente S dal tempo 0 al tempo T. Nel caso $0 \leq T < t$, l'importo ottenuto scontando linearmente S_t dal tempo t al tempo T deve essere uguale all'importo ottenuto capitalizzando linearmente S dal tempo 0 al tempo T. Notiamo che solo i casi $T = 0$ e $T = t$ sono consistenti con la legge degli interessi semplici. Infatti, in entrambi i casi, e solo in quei casi, vale l'Equazione (14). Per questo motivo alcuni studiosi hanno utilizzato uno schema d'ammortamento in regime lineare con condizione di equità imposta alla scadenza del prestito (Annibali et al., 2018). Tuttavia, se si considera il caso dei prestiti a rimborso graduale è possibile rimuovere anche questo ultimo elemento di ambiguità. Come riporta anche l'Autore, imponendo l'equilibrio finanziario al tempo m, si ha

$$S(1 + im) = \sum_{k=1}^{m} R_k \big(1 + i(m - k)\big). \tag{16}$$

Nell'Equazione (16) le rate sono capitalizzate dall'epoca di esigibilità all'epoca finale m e, come è stato evidenziato nella discussione dell'Equazione (15), questo procedimento genera risultati spuri che non sono consistenti con la legge degli interessi semplici. Resta, pertanto, solo l'epoca iniziale come l'unica possibile. Esistenza e unicità, dunque, proprio come nel titolo del primo dei due articoli in esame: 'Sull'esistenza e unicità dell'ammortamento dei prestiti in regime lineare'.

APPENDICE A LO SCHEMA GENERALE D'AMMORTAMENTO

Si consideri un prestito per l'importo S al tempo 0 da rimborsare mediante il pagamento di una successione di rate non negative $\boldsymbol{r} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$ con $R_m > 0$, esigibili ad intervalli di tempo regolari $\boldsymbol{t} = \{1, 2, \dots, m\}$ e sia $v(0,t)$ la funzione di sconto al tempo 0 in un regime assegnato (la trattazione può, tuttavia, essere estesa immediatamente anche al caso di rate non equidistanziate temporalmente).

Due sono le relazioni che consentono, in tutta generalità, di costruire il piano d'ammortamento del prestito. La prima descrive l'equilibrio finanziario al tempo 0,

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \, v(0,k). \tag{A.1}$$

La seconda descrive l'andamento nel tempo del debito residuo. Indicheremo con M_k il debito residuo alla generica epoca k, subito dopo il pagamento della k-esima rata. M_k è l'importo finanziariamente equivalente alla successione delle $m - k$ rate non ancora pagate a quell'epoca e deve avere, pertanto, lo stesso valore attuale del flusso di quelle rate. È dato da

$$M_k = \frac{1}{v(0,k)} \sum_{j=k+1}^{m} R_j \, v(0,j), \quad k = 1,2,\cdots,m-1, \tag{A.2}$$

con $M_m = 0$. Queste due formule derivano, dunque, dai principi primi della Matematica Finanziaria che regolano le equivalenze finanziarie (Mari e Aretusi, 2018; Peccati, 2020) e sono le uniche che servono per poter costruire univocamente il piano d'ammortamento, qualunque sia il regime adottato. In particolare, l'Equazione (A.2) mostra che l'importo di ogni rata nell'espressione del debito residuo è attualizzato dalla data di esigibilità al tempo $t = 0$: il processo di attualizzazione rimuove la componente di interessi di ciascuna rata. Successivamente, l'importo ottenuto sommando i valori attuali delle $m - k$ rate non ancora corrisposte all'epoca k è capitalizzato dal tempo $t = 0$ all'epoca k: la capitalizzazione include nel debito residuo gli interessi maturati nell'intervallo temporale $[0,k]$. Le grandezze finanziarie che compaiono nella parte destra del piano d'ammortamento esteso descrivono esattamente questo processo. Posto infatti,

$$S_k = R_k v(0,k), \tag{A.3}$$

e

(A.4) $$I_k^p = R_k - R_k v(0,k),$$

si ottiene che ciascuna rata può essere decomposta nel modo seguente:

(A.5) $$R_k = S_k + I_k^p.$$

L'importo S_k, ottenuto attualizzando l'ammontare della rata R_k, cioè rimuovendo da quell'ammontare il contenuto di interessi, rappresenta l'ammontare di capitale iniziale rimborsato con il pagamento dalla k-esima rata; I_k^p quantifica, invece, l'ammontare di interessi contenuti nella rata R_k e che sono corrisposti con il pagamento della k-esima rata. Ovviamente si ha,

(A.6) $$S = \sum_{k=1}^{m} S_k.$$

L'ultima grandezza finanziaria che compare nella parte destra del piano d'ammortamento esteso è

(A.7) $$D_{0,k} = \sum_{j=k+1}^{m} S_j\,, \quad k = 1,2,\cdots,m-1,$$

e rappresenta l'ammontare di capitale iniziale non ancora rimborsato all'epoca k e che sarà rimborsato con il pagamento delle m - k rate future. Ovviamente è $D_{0,0} = S$ e $D_{0,m} = 0$. Dall'Equazione (A.2) si ha,

(A.8) $$M_k = \frac{D_{0,k}}{v(0,k)}.$$

Il debito residuo, M_k, dunque, si ottiene dall'ammontare di capitale iniziale non ancora rimborsato all'epoca k, includendo gli interessi maturati sull'orizzonte temporale $[0,k]$ (miscela di capitale e interessi).

La parte sinistra del piano d'ammortamento esteso riproduce il piano d'ammortamento standard. Le grandezze che in questa parte compaiono si possono ottenere come descritto di seguito. L'Equazione (A.2) consente di scrivere la seguente relazione ricorsiva

(A.9) $$M_k = M_{k-1} + \left[\frac{v(0,k-1)}{v(0,k)} - 1\right] M_{k-1} - R_k,$$

che, esplicitata rispetto a R_k, fornisce la decomposizione della rata nella quota di capitale e nella quota interessi, (A.10) $$R_k = C_k + I_k,$$

dove

(A.11) $$C_k = M_{k-1} - M_k,$$

è la quota capitale e quantifica la variazione di debito residuo nell'intervallo temporale $[k - 1,k]$, e

(A.12) $$I_k = \left[\frac{v(0,k-1)}{v(0,k)} - 1\right] M_{k-1},$$

è la quota interessi e quantifica l'interesse maturato nell'intervallo $[k - 1,k]$. Vale, naturalmente, la relazione seguente

(A.13) $$\sum_{k=1}^{m} C_k = S.$$

Poiché nel regime composto si ha,

(A.14) $$v(0,k) = \frac{1}{(1+i)^k},$$

l'Equazione (A.12) fornisce,

(A.15) $$I_k = iM_{k-1}.$$

Poiché nel regime semplice si ha,

(A.16) $$v(0,k) = \frac{1}{1+ik},$$

l'Equazione (A.12) fornisce,

(A.17) $$I_k = \frac{iM_{k-1}}{1+i(k-1)}.$$

Nel regime semplice, dunque, la quota interessi si calcola sul valore attuale del debito residuo. Con buona pace dell'Autore, facciamo notare che l'Equazione (A.17) non è introdotta artificiosamente o surrettiziamente ma è conseguenza dell'impostazione teorica di fondo.

Un'ultima osservazione: l'ammontare degli interessi pagati non coincide con l'ammontare degli interessi maturati, $I_k^p \neq I_k$ e, ogni volta che gli interessi maturati sono superiori agli interessi pagati, $I_k^p > I_k$, la differenza di interessi, $I_k - I_k^p$, resta nel debito residuo a generare una miscela di capitale e interessi. Infatti dall'Equazione (A.9) si ottiene

$$M_k = M_{k-1} - S_k + I_k - I_k^p. \tag{A.18}$$

APPENDICE B L'AMMORTAMENTO CON *INPUT* QUOTE DI CAPITALE

La dimostrazione che proponiamo non fa uso dell'ipotesi di costanza della rata, perché non necessaria.

Siano $C_1, C_2, \ldots, C_m$, le quote di capitale di un prestito per l'importo S e supponiamo che valgano, in riferimento ai tempi $k = 1,2,\ldots,m$, le tre regole seguenti.

Regola 1

$$M_k = M_{k-1} - C_k, \quad M_0 = S, \quad M_m = 0. \tag{B.1}$$

Regola 2

$$I_k = iM_{k-1}. \tag{B.2}$$

Regola 3

$$R_k = C_k + I_k, \quad R_k \geq 0, \quad R_m > 0. \tag{B.3}$$

Dimostreremo che esiste una e una sola m-pla di valori

$$v(0,k) = \frac{1}{(1+i)^k} \quad k = 1,2 \cdots, m, \tag{B.4}$$

tale che le relazioni seguenti sono soddisfatte:

$$S = \sum_{k=1}^{m} R_k\, v(0,k), \tag{B.5}$$

e

$$M_k = \frac{1}{v(0,k)} \sum_{j=k+1}^{m} R_j\, v(0,j), \quad k = 1,2, \cdots, m-1. \tag{B.6}$$

La dimostrazione procede nel modo seguente. Sostituendo le Equazioni (B.2) e (B.3) nell'Equazione (B.1) si ottiene,

(B.7) $$M_k = M_{k-1} + iM_{k-1} - R_k,$$

da cui

(B.8) $$M_{k-1} = \frac{R_k + M_k}{1+i}.$$

Abbiamo trovato, in questo modo, una serie di equazioni ricorsive che consentono di dimostrare agevolmente il risultato. Se $k = 1$, infatti, si ha

(B.9) $$S = (M_1 + R_1)v(0,1),$$

con

(B.10) $$v(0,1) = \frac{1}{1+i}.$$

Sostituendo, nell'equazione (B.9), M_1 con la corrispondente espressione fornita dall'Equazione (B.8) si ottiene,

(B.11) $$S = R_1 v(0,1) + (M_2 + R_2)v(0,2),$$

con

(B.12) $$v(0,2) = \frac{1}{(1+i)^2}.$$

Procedendo iterativamente si perviene all'espressione finale,

(B.13) $$S = \sum_{k=1}^{m} R_k \, v(0,k),$$

con

(B.14) $$v(0,k) = \frac{1}{(1+i)^k}.$$

Infine, l'Equazione (B.6) si ottiene facilmente dall'Equazione (B.8) attraverso una procedura iterativa di tipo *backward* a partire dalla condizione finale $M_m = 0$. Questo dimostra la sufficienza. Il viceversa, cioè la dimostrazione della necessità, è un'immediata conseguenza dei risultati presentati nell'Appendice A.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Annibali, A., Annibali, A., Barracchini, C.: Lo “stato dell’arte”, sia accademico che professionale, sulla presenza del’anatocismo nell’ammortamento di mutui “alla francese” e relativa stesura del piano in capitalizzazione semplice. Le Controversie Bancarie 3, 82–104 (2017)
- Annibali, A., Annibali, A., Barracchini, C., Olivieri, F.: Rivisitazione del modello di calcolo dell’ammortamento “alla francese” di un mutuo in capitalizzazione semplice. Le Controversie Bancarie 10, 59–81 (2018)
- Bonferroni, C.E.: Fondamenti di Matematica attuariale. Litografia Felice Gili, Torino, 1938
- Cacciafesta, F.: In che senso l’ammortamento francese (e non solo esso) dia luogo ad anatocismo. Notizie di Politeia 120, 24–32 (2015)
- Cacciafesta, F.: Una proposta per superare il dialogo tra sordi in corso sull’ammortamento francese, con alcune osservazioni sul Taeg e sul Tan, in Rivista del diritto commerciale e del diritto generale delle obbligazioni, Vol.117, n.3, 2019
- Cacciafesta, F.: Prestiti reali e loro modellizzazioni: a proposito di due articoli di C. Mari e G. Aretusi. Il Risparmio (2023)
- De Felice, M., Moriconi, R.: La Teoria dell’Immunizzazione Finanziaria. Modelli e strategie. Il Mulino (1991)
- Fersini, P., Olivieri, G.; Sull’“anatocismo” nell’ammortamento francese. Banche e Banchieri 42(2), 134–171 (2015)
- Levi, E.: Corso di Matematica Finanziaria, La Goliardica, Prima Edizione. Milano, 1953
- Mari, C., Aretusi, G.: Sull’esistenza e unicità dell’ammortamento dei prestiti in regime lineare. Il Risparmio, 27–45 (2018)
- Mari, C., Aretusi, G.: Sull’ammortamento dei prestiti in regime composto e in regime semplice: alcune considerazioni concettuali e metodologiche. Il Risparmio, 115–151 (2019)
- Ottaviani, G.: Lezioni di Matematica Finanziaria. Veschi, Milano, 1988
- Peccati, L.: Angolo 3. www.Consulenti-Bancari-Online.it (2020)
- Pressacco, F., Beccacece, F., Cacciafesta, F., Favero, G., Fersini, P., Li Calzi, M., Nardini, F., Peccati, L., Ziani, L.: Anatocismo nei piani di ammortamento standardizzati tradizionali. Rapporto Scientifico dell’AMASES n. 2022/01 (2022)