

ISSN 2282-7765

ISSN 2282-7757

[online]

[printed]

Volume 3, Number 1, June 2015

Science & Philosophy

Journal of Epistemology, Science and Philosophy

Chief Editors

Franco Eugeni

Antonio Maturo

Advisory Editors

Franco Blezza

Nicolae Rambu

Ezio Sciarra

Accademia
Piceno-Aprutina
dei Velati in Teramo

Chief Editors (Editori Capo):

Eugeni Franco, Teramo, Italy
Maturo Antonio, Pescara, Italy

Advisory Editors (Consulenti Editoriali/Scientifici):

Blezza Franco, Chieti, Italy
Râmbu Nicolae, Iasi, Romania
Sciarra Ezio, Chieti, Italy

Editorial Board (Comitato Editoriale/Scientifico):

Ambrisi Emilio, Caserta, Italy
Casolaro Ferdinando, Napoli, Italy
Chitoiu Dan, Iasi, Romania
Ciarlante Camillo, Isernia, Italy
Corsi Vincenzo, Pescara, Italy
Corsini Piergiulio, Udine, Italy
Cruz Rambaud Salvador, Almeria, Spain
Daniela-Tatiana Soitu, Iasi, Romania
Delli Rocili Luciana, Pescara, Italy
Di Francesco Gabriele, Pescara, Italy
Gatto Romano, Potenza, Italy
Gerla Giangiacomo, Salerno, Italy
Hošková-Mayerová Šárka, Brno, Czech Republic
Innamorati Stefano, L'Aquila, Italy
Ispas Cristina, Reșița, Romania
Manuppella Giuseppe, Pescara, Italy
Marconi Domenico, Teramo, Italy
Maturo Fabrizio, Pescara, Italy
Migliorato Renato, Messina, Italy
Rotondo Paolo, Pescara, Italy
Savarese Elisa, Castellammare, Italy
Sessa Salvatore, Napoli, Italy
Squillante Massimo, Benevento, Italy
Tofan Ioan, Iasi, Romania
Ventre Aldo Giuseppe Saverio, Napoli, Italy
Viglioglia Maria Teresa, Melfi, Italy
Vougiuklis Thomas, Alexandroupolis, Greece
Zappacosta Agostino, Chieti, Italy

Scientific Coordinator of the student section (Coordinatore Scientifico della sezione studenti):

Casolaro Ferdinando

Editorial Manager and Webmaster (Curatore del Sito Web):

Manuppella Giuseppe

Graphic project (Progetto grafico):

Manuppella Fabio

Legal Manager (Direttore Responsabile):

Di Domenico Bruna

Publisher (Casa Editrice):

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (A.P.A.V.)

La matematica delle tavole degli apprendimenti

Emilio Ambrisi

Presidente Mathesis
(Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche dal 1895)
ambrisi.e@gmail.com

Sunto

Le tavole di apprendimento per la matematica costituiscono una interpretazione delle Indicazioni Nazionali per i Licei e delle Linee Guida per gli Istituti Tecnici e Professionali che è coerente con i loro principi scientifici e normativi. Esse sono frutto di un lavoro collettivo eseguito nell'ambito di due progetti varati dal MIUR e rappresentano la vera novità delle trasformazioni in atto nel sistema scolastico italiano dal 1997. In particolare, la vera innovazione didattica nel fare matematica.

Parole Chiave: didattica, matematica, lista.

1. Premessa

La legge che ha cambiato il sistema scolastico italiano compie vent'anni. Quando nel 1861 l'Italia fu fatta, la legge del nuovo Stato unitario stabiliva: le scuole dipendono dal ministro. Vent'anni fa con la legge n. 59 del 15 marzo 1997 si stabilì invece: le scuole sono autonome. Una discontinuità, una rottura con il passato che non poteva essere più decisa e marcata e i cui segni di cambiamento sono più che evidenti. Molti ricorderanno che il varo della legge fu accompagnato da un ampio e vivace dibattito con posizioni generalmente a favore, ma anche con diffuse preoccupazioni che paventavano il rischio di una frantumazione del sistema scolastico, la perdita della sua unitarietà e l'accentuazione delle differenze tra scuole e scuole, tra Nord Centro Sud e Isole, tra territori e territori, con scuole più "ricche" in alcuni territori e più "povere" in altri. Quel rischio allora ipotizzato, oggi si sta verificando. La scuola in Italia rischia di divenire motore che genera disparità invece che efficace e limpido

strumento di libertà e uguaglianza dei cittadini come peraltro è prescritto dalla costituzione. Occorre correre ai ripari.

Una delle necessità più evidenti - e che come matematici ci interessa - è fare chiarezza su che cosa le scuole devono insegnare. È questa peraltro una delle novità più significative del nuovo sistema, perché con la legge n. 59, successivamente regolamentata dal D.P.R. n. 275 del 1999, il programma d'insegnamento, fissato a livello ministeriale e uguale per tutti, ha cessato di esistere. Il programma ha acquistato una dimensione locale, è affidato alla progettazione di scuole e docenti ed è finalizzato al raggiungimento dei traguardi di conoscenze, abilità e competenze fissati, questi sì, per tutti a livello nazionale. Non ci sono dunque programmi ministeriali, ma Indicazioni Nazionali e Linee Guida che però malgrado siano vigenti da più anni non sono state ancora perfettamente intese né nei principi né in quali siano veramente i risultati di apprendimento da perseguire con l'azione didattica.

A tal fine pare utile illustrare, ripercorrendolo nella sua cronologia storica e nelle sue motivazioni, un lavoro che è stato fatto per la matematica. Il lavoro riguarda i due progetti messi in atto dal MIUR:

- ***“Condivisione e accertamento delle conoscenze, abilità e competenze previste a conclusione dell’obbligo d’istruzione e del primo biennio dei nuovi licei, istituti tecnici e professionali”.***
- ***“La prova scritta di matematica agli Esami di Stato di Liceo scientifico: contenuti e valutazione”.***

dei quali chi scrive è stato il coordinatore. Entrambi i progetti miravano a corrispondere al bisogno manifestato dai docenti di essere sostenuti nella lettura delle Indicazioni Nazionali e delle Linee Guida per conseguire una comune interpretazione dei risultati di apprendimento prescritti a conclusione del primo e del secondo biennio e del quinto anno.

I progetti varati dal MIUR sono stati realizzati dal 2011 al 2013, ma sono tuttora vitali in altre attività.¹ I due progetti hanno coinvolto direttamente centinaia di docenti e hanno prodotto risultati che sono stati disseminati nelle “*giornate matematiche*” organizzate a livello territoriale e promosse dallo stesso MIUR fino allo scorso anno scolastico². Tra i frutti delle attività dei due progetti ci sono le tavole degli apprendimenti per il primo biennio e per il quinto anno del liceo scientifico.

¹ Le tavole di apprendimento sono state il tema di vari convegni che l'associazione Mathesis ha tenuto in molte città italiane nel corso di quest'anno assumendosi anche il compito di definizione di una tavola degli apprendimenti per i licei non scientifici.

² Con la nota 28/09/2012, prot. MIURAOODGOS n. 6167 e con la nota del 20/11/2014, prot. n. 7173, entrambe a firma del direttore generale Carmela Palumbo.

2. La galleria matematica del Teniers e il quadro di Mondrian

L'idea del quadro o della tavola si presentò nel lavoro di lettura collegiale delle Indicazioni Nazionali e delle Linee Guida relativamente al primo biennio. Una lettura eseguita dai docenti nei seminari di studio con lo scopo di selezionare i risultati di apprendimento maggiormente significativi da conseguire a conclusione dei primi due anni di tutti gli indirizzi di studio: licei, tecnici e professionali. Un lavoro di lettura “collettiva”

effettuata setacciando i documenti ministeriali per distillare le gemme del pensiero matematico da individuare e fissare come meta dell'azione didattica per tutti: scuole, docenti, studenti e famiglie.



Figura 1

Quelle “gemme”, una volta definite, trovarono la loro sistemazione in un quadro del 1651 di *D. Teniers il giovane*. Ciascuna di esse, come un'opera d'arte, è incorniciata e posta in mostra in una **Galleria Matematica dei traguardi di apprendimento del primo biennio**. Un quadro pieno di altri quadri che illustrano sedici prodotti dell'arte matematica. Sedici gioielli da leggere, memorizzare e tener presenti quali tappe di studio, punti “focali”³ per ri-creare la conoscenza matematica in funzione dei risultati di apprendimento da

³ Nella letteratura internazionale un “focal point” è un punto di accumulazione, un punto dove si addensano più conoscenze, abilità e concetti; specifica, dunque, un contenuto matematico particolarmente significativo e da conoscere accuratamente.

perseguire e da raggiungere, spingendo ad andare oltre le artificiose trattazioni dei tradizionali capitoli dell'Algebra e della Geometria, della Trigonometria e dell'Analisi Matematica. Una visione della matematica integrata o *fusionista* che fu già di F.Klein, di G. Polya, di B. de Finetti.

Una lista di sedici gemme ciascuna delle quali ha la funzione di guidare il docente nella sua progettazione didattica, nella definizione del suo programma d'insegnamento. In questo modo, il docente conosce il traguardo, sa dove gli si chiede di arrivare. Sa che la meta del suo lavoro è l'acquisizione chiara e sicura da parte degli studenti, a conclusione del loro primo biennio, di ciascuno di quei sedici elementi della lista. Una meta che può raggiungere come vuole, scegliendo metodi, strumenti, linguaggi, esempi che arricchiscono di significato, applicazioni che contestualizzano, riferimenti storici e, sempre calibrando i tempi, seguendo un itinerario che attraversa i capitoli tradizionali, connettendo variamente teoremi e algoritmi, cogliendone particolari e generalizzazioni in una visione unificatrice. Il docente gioca cioè con il suo sapere matematico, come un giocoliere che manovra e assembla diversamente ciò che sa; non insegna l'Algebra, la Geometria, la Trigonometria nelle loro ben "levigate" sistemazioni, non srotola, né ricapitola, una matematica già fatta, ma rimescola, associa fatti, idee e procedure che ri-organizza in una rete robusta di ragionamenti e non in esili e canoniche catene deduttive.

MATHESIS – Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche
TAVOLA DEGLI APPRENDIMENTI A CONCLUSIONE DEL LICEO SCIENTIFICO

	Qual è il grafico di $y=f(x)$?	$e^{i\pi} + 1 = 0$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	Esistono solo cinque poliedri regolari
Equazioni di luoghi geometrici	Permutazioni Disposizioni Combinazioni	Come approssimare e, π, φ		\aleph_0 Chi è alephzero?
I teoremi di Lagrange, Rolle, l'Hôpital	Problemi di massimo e minimo Il principio di induzione	Applicazione degli integrali al calcolo di aree e volumi	Dall'andamento del grafico alla possibile espressione analitica della funzione	Come approssimare un integrale definito
Principio di Cavalieri	Cos'è un sistema assomatico?	Quante volte devo giocare al lotto per vincere?	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	

Figura 2

La matematica delle tavole degli apprendimenti

Non diversa è la storia che ha portato alla tavola degli apprendimenti attesi a conclusione del liceo scientifico, della sua sezione sportiva e dell'opzione delle scienze applicate. La selezione dei 21 risultati di apprendimento si è avvalsa di un attento e ampio lavoro di lettura, parola per parola, delle Indicazioni e anche dei pareri espressi dai docenti nelle annuali indagini Matmedia⁴ sui risultati della prova scritta di matematica negli esami di Stato. I 21 risultati di apprendimenti hanno trovato posto in un quadro, notissimo, dell'olandese *Piet Mondrian* (1872-1944).

I due quadri, la Galleria del Teniers e la tavola del Mondrian, sono divenuti due poster realizzati per stare nelle aule scolastiche⁵, appesi alle pareti, essere di stimolo allo studio e a pensare e parlare di matematica in un modo diverso, di essere cioè strumento di comunicazione della matematica, trovando nuove connessioni e modi efficaci per esprimersi. Una guida per i docenti, per la progettazione dei loro itinerari didattici: dove tendere? Ma anche un riferimento per gli studenti: le questioni matematiche verso cui volgere l'impegno di studio. La didascalia riportata a margine della tavola di Mondrian ne descrive in modo sufficientemente completo il significato e la portata:

- L'idea del quadro nasce dal bisogno di presentare in forma rapida ed efficace i risultati attesi a conclusione del corso di studi di Liceo Scientifico. Un lavoro fatto in prosecuzione di quello già realizzato per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado.
- Un insieme costituito da un contenuto numero di “*focal point*”. Una tavola degli apprendimenti alla quale il docente può riferirsi per progettare il suo insegnamento, una sorta di stelle fisse da tener presenti navigando nell'universo del sapere matematico. Una guida, quindi, per discenti e docenti. Dove tendere gli sforzi? Un modo efficace per corrispondere, senza rovinosi eccessi, alle tante esigenze didattiche, e anche a una *flipped classroom*. Una classe capovolta: studiare a casa e lavorare in classe, confrontarsi sul lavoro svolto, su significati e applicazioni, storia e connessioni da cogliere e organizzare.
- Una tavola che è anche un Syllabus essenziale per la prova scritta di matematica agli esami di Stato e uno strumento per realizzare un concreto cambiamento di prospettiva: dall'attenzione ai punti di partenza

⁴ Il sito www.matmedia.it nacque per iniziativa del MIUR nel 1998 come laboratorio a distanza per l'insegnamento della matematica. Dal 2001 al 2014 è stato il riferimento per le annuali indagini sui risultati della prova scritta negli esami di Stato conclusivi dei licei scientifici realizzate attraverso la collaborazione di MIUR- Mathesis-Seconda Università di Napoli.

⁵ I poster sono stati realizzati per iniziativa della Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche «Mathesis» e distribuiti nelle scuole.

del discorso matematico, allo sguardo rivolto ai punti di arrivo, dove si vuole arrivare. La scelta, cioè, di ciò che va insegnato per prima in funzione di ciò che serve per approdare alla meta. Dunque, la riorganizzazione dei percorsi didattici in funzione dei risultati di apprendimento da perseguire e da raggiungere annullando così le abituali gradualità e gerarchie concettuali. Qualcosa che ha anche il significato di rompere con i tradizionali capitoli dell'Algebra e della Geometria, della Trigonometria e dell'Analisi Matematica e con le loro canoniche trattazioni, per approdare ad una matematica integrata, pensata in modo *fusionista*, non tagliata a fette, ciascuna sistemata in un suo specifico cassetto. In definitiva, un processo analogo alla ricostruzione del continuo a partire dal discreto

- Il quadro contiene teoremi e principi, concetti, formule e procedure, problemi e forme geometriche esposti come in una galleria d'arte matematica. "Fatti" matematici percepibili, comprensibili, di cui si può parlare e dibattere. In ciascuno di essi si addensano altri concetti, altre idee e procedure che è possibile collegare in un'unica trama concettuale, logica, applicativa. Il quadro è il distillato della lettura delle Indicazioni Nazionali e dell'ampio dialogo che ha coinvolto i docenti nelle annuali indagini sui risultati della prova scritta di matematica agli esami di Stato realizzata attraverso il sito www.matmedia.it.

3. Il valore della lista

Le tavole di apprendimento, realizzate nell'ambito dei due progetti ministeriali, sono dunque una esplicitazione del significato normativo delle Indicazioni Nazionali e delle Linee Guida: quello che avrebbero dovuto essere e non sono. L'idea che ne è alla base, è dunque di presentare l'elenco di ciò che la Società e il governo del Paese hanno individuato come importante, da insegnare e da apprendere⁶. Pedagogicamente, una rivoluzione nel modo di pensare all'insegnamento, non più orientato a seguire una organizzazione standard e canonica della disciplina, ma a ri-costruire percorsi di spiegazione e di comprensione. Un rimescolamento dell'ordine della trattazione, di ciò che viene prima e ciò che viene dopo, di concetti primari e secondari, anzi, un vero ribaltamento dell'impostazione: i punti di partenza vengono scambiati con i punti di arrivo e sono questi a consigliare legami e connessioni. Alla base del lavoro effettuato c'è dunque l'idea di dover fornire una lista dei risultati di apprendimento. Le liste sono ovunque. Sono di cose belle e brutte, di persone, di

⁶ Le fonti normative delle Indicazioni Nazionali e delle Linee Guida sono l'art. 21 della L.59/1997 e l'art. 8 del dpr 275/99.

fatti e di istruzioni per muoversi, capire e vivere. Conviviamo continuamente con esse, sono lo strumento più efficace di gestione della complessità e della quotidianità. Tante liste da provocare vere vertigini com'è il titolo del libro di U. Eco: *Vertigine della Lista* (2009).

Una lista, tra le tante, abbastanza interessante fu proposta pochi anni fa da *M. Minsky* (1927-), una delle più belle menti creative della seconda metà del XX secolo, padre dell'intelligenza artificiale. La lista di Minsky è una graduazione delle operazioni elementari compiute dall'uomo secondo il loro grado di complessità intellettuale. Ai primi gradini della scala gerarchica Minsky collocò le operazioni matematiche, le prime ad essere affidate a delle macchine, mentre pose abbastanza in alto, contrariamente a quanto comunemente creduto, operazioni usuali come riconoscere un volto noto in mezzo alla gente o anche rifare il letto o infilare un cuscino in una federa. Alla sommità della scala, Minsky pose il sorriso umano, operazione talmente complessa che mai, asserì, avremo robot che sappiano sorridere. La proposta di Minsky è una lista ordinata di operazioni ma pur sempre una lista. La matematica, che ha certo a che fare con la gestione dei processi mentali, è piena di liste famose. Lo sono ad esempio gli Elementi di *Euclide* – un elenco ordinato di 465 teoremi – e i 23 problemi che *David Hilbert* (1862-1943) presentò la mattina dell'8 agosto 1900 al Congresso Internazionale di Parigi⁷. Un elenco, quello di Hilbert, ove l'ordine non conta affatto, ma che contiene tutti i problemi che a quella data aspettavano di essere risolti. E, fatto importante, riscontrò un consenso unanime; nessuno accusò Hilbert di avervi inserito un problema ormai risolto o di averne mancato qualcuno. La lista era completa e ebbe enorme influenza: quei problemi giocarono il ruolo di “grandi” problemi, di veri e propri punti di riferimento o mete alle quali il lavoro dei matematici doveva tendere e mirare. Un'operazione di grande valore intellettuale, possibile solo per una mente capace di dominare tutta la matematica del momento, e di una utilità eccezionale.

Quei problemi aprirono tracciati di ricerca, ne illuminarono i percorsi e servirono ad indirizzare i giovani matematici, ma anche a rinnovare i corsi universitari e ad accendere il dibattito sull'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie. Di lì a poco molti dei problemi di Hilbert cominciarono ad avere una risposta e dai percorsi di ricerca prima illuminati ne conseguirono itinerari didattici, universitari e secondari, accettati ed universalmente seguiti. Dal punto di vista espositivo e didattico, si trattò di un avvenimento eccezionale che comportò una precisa ri-organizzazione della matematica tanto che spesso ci

⁷ E' l'anno dell'esposizione universale il cui tema fu il *bilancio di un secolo*. Hilbert coerentemente presentò il bilancio della matematica "*Se vogliamo immaginarci lo sviluppo presumibile della conoscenza matematica nel prossimo futuro, dobbiamo far passare davanti alla nostra mente le questioni aperte e dobbiamo considerare i problemi che sono posti dalla scienza attuale e la cui soluzione attendiamo dal futuro. Questi giorni, che stanno a cavallo tra due secoli, mi sembrano ben adatti per una rassegna dei problemi [...]*"

si è interrogati sulla ripetibilità di una siffatta operazione. Una lista aggiornata al 1954 fu chiesta ad esempio a *John von Neumann* (1903-1957) che, però, declinò l'invito dichiarandosi “*incapace di spaziare in un così vasto campo*”. Vent'anni dopo, nel maggio del 1974, l'*American Mathematical Society* organizzò uno speciale simposio con lo scopo di valutare gli sviluppi e le conseguenze di ognuno dei 23 problemi posti da Hilbert e allo stesso tempo anche con l'obiettivo di stilare un elenco dei problemi irrisolti; la consapevolezza della difficoltà dell'operazione indusse però a restringere il campo alle questioni che avessero un legame con i problemi di Hilbert, una sorta di filiazione diretta o anche riflessa. Il lavoro preparatorio del lavoro dell'AMS fu iniziato da *J. Dieudonné* (1906-1992) e portato a compimento da *F.E. Browder* (1927-) attraverso una fittissima corrispondenza con matematici impegnati nei diversi campi di ricerca ed in ogni parte del mondo. Un lavoro impegnativo e, per quanto condensato in solo due volumi, enorme (Browder 1976). Il gran numero di matematici impegnati, la loro competenza specifica, le modalità stesse di listare i problemi per settori testimoniano di quanto varia e ricca fosse la matematica. Il prodotto di questo lavoro è una lista di circa 130 problemi suddivisi in 27 branche o aree della matematica e frutto delle risposte di una trentina di specialisti. Frutto cioè del lavoro di più intelletti e non la sintesi elaborata da una mente sola come fu il lavoro di Hilbert.

4. L'Antologia di Matmedia

Al lavoro di Hilbert si ispira l'*Antologia* pubblicata dal servizio in rete *Matmedia* per proporre un florilegio matematico fatto di liste. Accanto ai “grandi problemi” di Hilbert trovano posto “i grandi teoremi”, “i grandi momenti”, “i grandi matematici”, “i grandi problemi dell'educazione” e, ancora, “i risultati più belli” secondo la lista definita, attraverso un referendum, dalla rivista *The Mathematical Intelligencer* e quella delle “tendenze attuali” nella didattica della matematica.

Come si vede, alcune delle liste dell'Antologia di Matmedia riguardano il settore della storia della matematica, un campo così palesemente sconfinato e indomabile da indurre *G.C. Rota* a definirlo un campo “disastrato” e asserire: ho conosciuto matematici che si sono votati allo studio della storia della loro disciplina cominciando abbastanza giovani e volendo partire dalle origini. La conclusione è stata che sono morti ultranovantenni senza andare al di là della matematica greca. Oggi è particolarmente enfatizzata la tendenza ad organizzare la storia segnando qualcosa, quasi a discretizzare ciò che è ontologicamente continuo: la freccia del tempo. Si sono realizzati così tentativi significativi di riorganizzazioni concettuali che pongono, tra l'altro, un legame profondo e produttivo tra scienza e comunicazione. Abbiamo storie organizzate per “grandi

La matematica delle tavole degli apprendimenti

momenti” (H. Eves), “grandi capitoli” (M. Kline), “grandi matematici” (E.T. Bell), “grandi teoremi” (W. Dunham). In particolare, quest’ultimo di Dunham (1992) è un viaggio storico che nasce dalla instaurazione di una analogia inesplorata: *“discipline diverse come la letteratura, la musica e l’arte hanno tutte una loro tradizione critica di esame dei capolavori – i grandi romanzi, le grandi sinfonie, i grandi quadri – che sono considerati gli oggetti di studio più rappresentativi e illuminati. Con questo taglio si scrivono libri e si tengono corsi, al fine di consentire una maggiore familiarità con le pietre miliari della disciplina e con le donne e gli uomini che l’hanno creata”*.

Quale l’analogo, in matematica, del capolavoro artistico, quali le pietre miliari della disciplina? Qui il taglio con cui sono stati scritti e si scrivono i libri è profondamente diverso e così il modo di studiarla e di presentarla: un unico grande romanzo, una sola grande sinfonia cui molti e progressivamente pongono mano, facendone poi perdere le tracce. Per Dunham è il teorema, il grande teorema, la vera *unità creativa* della matematica come il romanzo o la sinfonia lo sono rispettivamente per la narrativa e la musica. Così come i letterati selezionano autori e capolavori nella descrizione di una storia della letteratura, Dunham ha selezionato i suoi capolavori, i grandi teoremi atti a delineare un itinerario, uno dei possibili viaggi attraverso il genio matematico. I teoremi o pietre miliari che si incontrano in questo storico viaggio sono i seguenti:

1. La quadratura della lunula
2. La dimostrazione euclidea del teorema di Pitagora
3. L’infinità dei numeri primi
4. L’area del cerchio
5. La formula di Erone per l’area di un triangolo
6. La soluzione della cubica ad opera di Cardano
7. Il calcolo di π col metodo di Newton
8. La divergenza della serie armonica
9. La valutazione di $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{k^2}$
10. La confutazione di Eulero della congettura di Fermat
11. La non numerabilità del continuo
12. Il teorema di Cantor

Quello di Dunham è un viaggio storico che tiene conto:

- a. degli uomini: i geni che hanno intravisto ed aperto nuove strade;
- b. dell’importanza del risultato; ad esempio per le lunule di Ippocrate l’aver sconfessato l’opinione che aree racchiuse da curve dovessero tutte coinvolgere π ;
- c. della dimostrazione: è il ragionamento deduttivo la vera chiave dell’interpretazione storica, del sigillo di capolavoro, ed è anche la caratteristica fondamentale dell’insegnamento (fa parte, peraltro, dell’esperienza di ogni insegnante la consapevolezza che l’alunno che ha

capito la sua prima dimostrazione, ha stabilito un rapporto fecondo con la matematica).

Così posto il lavoro di Dunham mostra la sua rilevanza pedagogica e il suo viaggio realizza un effettivo itinerario didattico dove l'ordine e la continuità del discorso e dello sviluppo matematico sono ri-costruiti e ri-assemblati a partire da tappe ritenute significative: il globale dal locale. Un analogo delle tavole di Mondrian e del Teniers.

Se i nostri giovani al termine del loro corso di studi superiori sapessero parlare di ciascuno degli argomenti della lista di Dunham o degli argomenti, concetti e procedure appartenenti ad una qualsiasi altra lista stilata con un occhio rivolto al raggiungimento di traguardi matematicamente importanti come sono le tavole degli apprendimenti certamente potremmo essere più soddisfatti, la società avrebbe più conoscenze matematiche e meno da lamentarsi della loro carenza.

5. Conclusione

C'è chi vede nella produzione di queste liste una sorta di tendenza al cannibalismo, un voler fare a "pezzi" la matematica. Un modo per produrre lacerazioni nel corpo della matematica e cedere alla moda di stilare classifiche o hit-parade di risultati. Nessuno nega, però, che può essere stimolante fissare l'attenzione su alcuni caratteri, – storici, estetici, applicativi, spaziali, dialettici – e essere condotti a staccare, estrapolare un particolare risultato o formula o teorema dal suo contesto della comunicazione o derivazione standard o meglio dire dalla sua postazione nella sequenza dell'apprendimento canonico; a considerarlo, esaminarlo, ammirarlo anche, come un quadro, un'opera d'arte, cogliendone la portata e la ricchezza di significato; a vederlo e chiarirlo nella sua interezza; ad individuarlo, infine, quale punto nodale di una robusta rete didattica e non quale semplice anello di una fragile catena di inferenze logiche. Una modalità che dovrebbe far parte delle opportunità a disposizione del docente per stimolarlo ad indicare ai propri allievi, anche prima di srotolare la sua "rete" didattica, i punti di *singolarità* del suo progetto didattico, portandolo così, ad esempio, a fissare, per una classe del primo biennio:

- *la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma* perché la pone al centro dell'attività algebrica, il cuore stesso dell'algebra (a proposito ha descritto esperienze interessantissime la matematica polacca *Z. Krygowska*)

- *il teorema di Ruffini* perché lo ritiene il più bel teorema che gli alunni possono riformulare e dominare: $P(x)$ è divisibile per $x-a$ se e solo se $P(a)=0$ e ancora perché rappresenta il passaggio dalla x considerata come lettera, mero simbolo, proprio dell'algebra, alla x trattata come variabile, propria del linguaggio delle funzioni e avvio all'*Analisi Matematica*

La matematica delle tavole degli apprendimenti

• *il teorema di Talete* perché punto nodale di sviluppo di uno dei capitoli più belli della geometria piana, un “*teorema fugace e dolce quanto un raggio di sole munito delle sue ombre. . .*” secondo quanto ne dice M. Serres (1994) o in modo equivalente: la divisione di un segmento in n parti uguali che apre al *paradosso di Achille e la tartaruga* e alla dialettica *continuo/discreto*. Ma ancora e/o in alternativa: le proprietà angolari del cerchio, la misura del cerchio, l’infinità dei numeri primi, l’irrazionalità e il calcolo di $\sqrt{2}$, la sezione aurea di un segmento, ecc..

La rivoluzione compiuta sarebbe che in matematica ove tutto sembra indistinto, perché intimamente connesso in un ben determinato modo, ove non si può parlare di questo se non si è parlato prima di quello, ecc. finalmente si potrebbe parlare di qualcosa: gli alunni potrebbero anche saper dire che cosa sanno di matematica e prima ancora quale è il bersaglio del loro impegno di apprendimento e parlare e leggere e documentarsi su questo, eventualmente anche navigando in Internet.

Le tavole degli apprendimenti traducono, dunque, nel modo più incisivo possibile i principi scientifici, pedagogici e normativi delle Indicazioni Nazionali e delle Linee Guida e seguirle equivale a **fare matematica** non a ripercorrerla pedissequamente in una sistemazione già fatta! Equivale a costruirla, eventualmente con metodo laboratoriale e seguendo la via genetica, non scodellarla!

Bibliografia

SERRES M., (1994), *Le origini della geometria*, Feltrinelli, Milano, 1994

BROWDER F.E. (Edited by), (1976), *Mathematical developments arising from Hilbert Problems*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

DUNHAM W., (1992), *Viaggio attraverso il genio*, Zanichelli, Bologna, 1992

ECO U., (2009), *Vertigine della Lista*, Bompiani, Orio al Serio (BG)

Pedagogia e Didattica della Chimica

Franco Blezza¹

Università “G. d’Annunzio”
Chieti - Pescara
franco.blezza@unich.it

Sunto

In questo saggio si espone un complesso organico di riflessioni e di proposte sulla Didattica della Chimica, con riferimento alla ricerca nel settore e alla formazione dei docenti. L’incultura scientifica che permane nella scuola e nella società italiane ha origini filosofiche e pedagogiche ben precise, che richiedono risposte sullo stesso terreno che tengano conto della competenza disciplinare, come per tutte le questioni relative all’insegnamento scientifico e a quello tecnico nel nostro Paese.

Parole Chiave: Chimica, Pedagogia, Didattica, Metodologia, scuola

1. Introduzione

Al V Congresso Nazionale di Didattica della Chimica (Roma, 9-11 dicembre 1987), presentammo una comunicazione della quale l’argomento, e prima di tutto la formulazione del titolo, suscitarono qualche reazione contraddittoria, non sapremo dire se più tra i chimici, ovvero tra i pedagogisti: “Per una pedagogia della chimica”.

Si trattava di quello che Imre Lakatos avrebbe denominato un “progetto di ricerca scientifico” (Lakatos, Lakatos & Musgrave), parte di un progetto più ampio relativo a quella che avremmo definito “didattica scientifica”, ma che era prima di tutto un impegno. Su tutto ciò avevamo avanzato riflessioni generali e teoriche e proposte applicative, seguendo attività di sperimentazione didattica e di formazione continua dei docenti per oltre un decennio². Da allora, queste

¹ L’autore è ordinario di Pedagogia generale e sociale, laureato in Fisica.

² In quel contesto si sono espresse molte opere anche monografiche ormai introvabili. Una prima sintesi si era avuta in *Educazione e scienza* (sottotitolo *Idee e proposte dalla scuola di base alle superiori*; SEI, Torino 1989).

ricerche sono proseguite, come testimoniato da una diversificata pubblicistica, coronata nel contributo sulla “Didattica della chimica” (in Laeng 1991, pag. 251-280) e in un’opera comprensiva (Blezza 1994).

Da quell’occasione convegnistica, sono trascorsi quasi tre decenni e svariate riforme della scuola, più o meno organiche, ad un ritmo frenetico e perfino eccessivo, incompatibile con la effettiva possibilità di applicare ciascuna di esse e di rendersi conto delle potenzialità e dei limiti. Ma il problema della chimica nella scuola, di quale ruolo educativo e culturale dovesse prendere alla chimica, e di quale necessità della chimica vi fosse per la cultura e per la società tutta, non ha trovato alcuna soluzione, forse anche perché non è mai stato posto rigorosamente.

2. La Chimica nella Cultura Scientifica e nella Cultura Generale

Il dominio della cultura scientifica è vasto e diversificato. In quest’ambito, il posto che spetta alla Chimica risulta essere pedagogicamente pregiato sotto molti punti di vista: in particolare, essa presenta un equilibrio dinamico tra *componente dottrinale, teorica e generale* e *componente applicativa, tecnica, industriale*, un equilibrio leggibile molto più nitidamente e trattabile in modo non altrettanto necessitato nei confronti di altre componenti della cultura scientifica, le quali pure si vedono accordare dalla tradizione e dalle innovazioni più recenti risorse e spazi maggiori. Lo precisiamo, nella esplicita e chiarissima riserva che, nel complesso, la cultura scientifica continua a vedersi assegnare nella scuola italiana spazi, tempi, risorse ed attenzioni tragicamente inadeguati: la dimensione scientifica è stata da circa un secolo, e continua ad essere, insufficiente nella scuola italiana.

Ma non si tratta solo di un problema di pedagogia e didattica scolastiche, bensì anche di educazione non istituzionalizzata e generale, di quella che è oggetto di studio della *Pedagogia sociale* (Blezza 2010). Basterebbe prestare attenzione a numerosissimi e gravi problemi generali che i media seguitano a porre all’attenzione di tutti per rendersene conto: dal problema energetico al problema alimentare, dal problema dell’acqua al problema dell’aria, dal problema del buco dell’ozono al problema della mobilità, dal problema dello sviluppo sostenibile al problema della qualità della vita urbana, e questo elenco potrebbe essere portato molto oltre, e arricchito dall’esperienza di ciascuno dei lettori. Se ne coglierebbe immediatamente come il componente chimico fosse essenziale a cominciare dalla corretta e rigorosa posizione e dalla prima proposta ipotetica dei possibili tentativi di soluzione, mentre viceversa la mancanza di cultura chimica, nel contesto più ampio della mancanza di cultura scientifica, ne impedisce, nonché alcuna possibile ipotesi o speranza di soluzione, perfino una posizione rigorosa e fruibile.

La denegazione della cultura scientifica, e l'imposizione idealistica e ideologica della incultura scientifica a scuola come nella società, colpiscono nel componente chimico in maniera più acuta e, se vogliamo, più facile ad individuarsi. Anziché essere correttamente colta come una necessità inderogabile per tutti nell'affrontare problemi generali degli ultimi secoli, con particolare riguardo all'evoluzione della conoscenza e all'abbattimento di ostacoli per la vita umana, la chimica viene facilmente presa come fittizio e consolatorio capro espiatorio nei confronti di quegli stessi problemi per affrontare e tentare di risolvere i quali essa risulterebbe in tutta evidenza maggiormente indicata. Con il che, si ripeterebbe specificamente quella metodologia polemica collaudata dai neoidealisti italiani nella prima metà del '900 di condurre attacchi distruttivi non nei confronti della scienza quale essa è, quale essa si svolge e si evolve e quale essa deve essere, bensì nei confronti di una visione artificiosa e in fondo arbitraria della scienza, non realistica e storicamente non aderente, per lo più filtrata a base di concezioni filosofiche ottocentesche cui non corrispondeva più nemmeno un presentabile paradigma di scienza, per lo meno dalla seconda metà del XIX secolo.

Per dirla con Luigi Einaudi, era come costruirsi un antagonista polemico di comodo sotto forma di fantoccio, con il quale si polemizzava e si vinceva la polemica in modo molto più facile che non con personaggi politici in carne ed ossa. Ma di più, ciò che valeva retoricamente per escludere la scienza dalla cultura della scuola e della società nel suo complesso, nella chimica trovavano delle esemplificazioni più suadenti quanto fallaci ed ingannevoli, per il fatto che quei problemi che proprio la chimica era essenziale per affrontare e porre le venivano invece, nonché ascritti, addirittura attribuiti, imputati, addebitati, dipinti e tatuati (o marchiati a fuoco) addosso come simbolo d'infamia.

3. Un Contributo Letterario

Qualcosa dovrebbe averci insegnato l'Alessandro Manzoni che descriveva la lotta per il pane combattuta con mezzi intrinsecamente contraddittori, ma di grande impatto sul popolo, come lo erano l'imposizione di un prezzo fuori mercato ovvero il furto di farina dai forni. Era lo stesso Alessandro Manzoni che stigmatizzava una mentalità anti-scientifica che pure già nel suo periodo era evidente, descrivendo sarcasticamente quel Don Ferrante il quale argomentava in modo dotto e suavisivo come il contagio della peste non esistesse, e quindi non fosse necessario compiere alcun atto per evitarlo: con il che egli si sarebbe ammalato di peste e sarebbe morto prendendosela, anziché con la sua ignoranza e la sua superba supponenza, "con le stelle", così cercando della stessa ignoranza una tranquillizzante spiegazione d'ordine astrologico.

Quest'ultimo brano merita una lettura integrale. Chi e di formazione scientifica non sottovaluta l'importanza del componente letterario, storico,

filosofico, artistico della sua cultura, ed è in grado di effettuare le osservazioni che gli competono.

“Dice adunque che, al primo parlar che si fece di peste, don Ferrante fu uno de' più risoluti a negarla, e che sostenne costantemente fino all'ultimo, quell'opinione; non già con ischiamazzi, come il popolo; ma con ragionamenti, ai quali nessuno potrà dire almeno che mancasse la concatenazione.

- In rerum natura, - diceva, - non ci son che due generi di cose: sostanze e accidenti; e se io provo che il contagio non può esser né l'uno né l'altro, avrò provato che non esiste, che è una chimera. E son qui. Le sostanze sono, o spirituali, o materiali. Che il contagio sia sostanza spirituale, è uno sproposito che nessuno vorrebbe sostenere; sicché è inutile parlarne. Le sostanze materiali sono, o semplici, o composte. Ora, sostanza semplice il contagio non è; e si dimostra in quattro parole. Non è sostanza aerea; perché, se fosse tale, in vece di passar da un corpo all'altro, volerebbe subito alla sua sfera. Non è acquee; perché bagnerebbe, e verrebbe asciugata da' venti. Non è ignea; perché brucerebbe. Non è terrea; perché sarebbe visibile. Sostanza composta, neppure; perché a ogni modo dovrebbe esser sensibile all'occhio o al tatto; e questo contagio, chi l'ha veduto? chi l'ha toccato? Riman da vedere se possa essere accidente. Peggio che peggio. Ci dicono questi signori dottori che si comunica da un corpo all'altro; ché questo è il loro achille, questo il pretesto per far tante prescrizioni senza costrutto. Ora, supponendolo accidente, verrebbe a essere un accidente trasportato: due parole che fanno ai calci, non essendoci, in tutta la filosofia, cosa più chiara, più liquida di questa: che un accidente non può passar da un soggetto all'altro. Che se, per evitar questa Scilla, si riducono a dire che sia accidente prodotto, danno in Cariddi: perché, se è prodotto, dunque non si comunica, non si propaga, come vanno blaterando. Posti questi princìpi, cosa serve venirci tanto a parlare di vibici, d'esantemi, d'antraci...?

- Tutte corbellerie, - scappò fuori una volta un tale.

- No, no, - riprese don Ferrante: - non dico questo: la scienza è scienza; solo bisogna saperla adoprare. Vibici, esantemi, antraci, parotidi, bubboni violacei, furoncoli nigricanti, son tutte parole rispettabili, che hanno il loro significato bell'e buono; ma dico che non han che fare con la questione. Chi nega che ci possa essere di queste cose, anzi che ce ne sia? Tutto sta a veder di dove vengano.

Qui cominciavano i guai anche per don Ferrante. Fin che non faceva che dare addosso all'opinione del contagio, trovava per tutto orecchi attenti e ben disposti: perché non si può spiegare quanto sia grande l'autorità d'un dotto di professione, allorché vuol dimostrare agli altri le cose di cui sono già persuasi. Ma quando veniva a distinguere, e a voler dimostrare che l'errore di que' medici non consisteva già nell'affermare che ci fosse un male terribile e generale; ma nell'assegnarne la cagione; allora (parlo de' primi tempi, in cui non si voleva sentir discorrere di peste), allora, in vece d'orecchi, trovava lingue

ribelli, intrattabili; allora, di predicare a distesa era finita; e la sua dottrina non poteva più metterla fuori, che a pezzi e bocconi.

- La c'è pur troppo la vera cagione, - diceva; - e son costretti a riconoscerla anche quelli che sostengono poi quell'altra così in aria... La neghino un poco, se possono, quella fatale congiunzione di Saturno con Giove. E quando mai s'è sentito dire che l'influenze si propaghino...? E lor signori mi vorranno negar l'influenze? Mi negheranno che ci sian degli astri? O mi vorranno dire che stian lassù a far nulla, come tante capocchie di spilli ficcati in un guancialino?... Ma quel che non mi può entrare, è di questi signori medici; confessare che ci troviamo sotto una congiunzione così maligna, e poi venirci a dire, con faccia tosta: non toccate qui, non toccate là, e sarete sicuri! Come se questo schivare il contatto materiale de' corpi terreni, potesse impedir l'effetto virtuale de' corpi celesti! E tanto affannarsi a bruciar de' cenci! Povera gente! brucerete Giove? brucerete Saturno?

His fretus, vale a dire su questi bei fondamenti, non prese nessuna precauzione contro la peste; gli s'attacò; andò a letto, a morire, come un eroe di Metastasio, prendendosela con le stelle.

E quella sua famosa libreria? È forse ancora dispersa su per i muriccioli.”³

4. Tradizioni Filosofiche Ostative

La chimica ha invece tutte le carte in regola per presentarsi non solo come una parte importante di quella cultura scientifica che non è più né possibile né lecito negare a scuola e nella vita civile, ma come un componente individuabile in modo nitido e nella sua essenzialità e necessità per l'uomo d'oggi in prospettiva futura. Il cittadino, il soggetto di storia, la persona umana non può più porsi, se mai ha potuto prima, di fronte alla realtà sprovvisto dei necessari strumenti concettuali ed operativi di carattere scientifico, e di carattere chimico in particolare.

Il lavoro svolto per decenni dalla Divisione Didattica della Società Chimica Italiana è una valida testimonianza non solo di questa necessità, ma anche della presenza di risorse umane e culturali per farvi fronte in modo pieno e positivo. La pedagogia, in questo, può e deve fare la sua parte, per lo meno a tre specifici riguardi: sia mediando tra la cultura scientifica e le varie sedi e occasioni educative, tra le quali vi è in primo luogo la scuola, ma vi sono anche i media, la società, la politica nel senso più lato del termine; sia fornendo ai didatti di cultura chimica gli strumenti concettuali ed operativi per rendere pienamente operante, fruibile ed efficiente il loro contributo; sia anche (o prima di tutto) per la sua parte specifica ed “interna”, agendo a che attorno a questa

³ *I promessi sposi*, cap. XXXVII

imprescindibile esigenza si costituiscano la dovuta consapevolezza e la necessaria sensibilità sociale.

Si può, insomma, essere un uomo di cultura ignorando la scienza, e la chimica in questo ambito? La domanda è retorica, eppure se ci allontaniamo dalla domanda nella sua semplicità assistiamo a testimonianze e fenomeni ben noti di segno contraddittorio.

Domandiamoci prima di tutto per quale motivo, come e per quale complesso di fattori filosofici, ideologici, politici, sociali, per molti decenni si sia potuto asserire, credere, proclamare e fin strombazzare il contrario. Ancora oggi, non mancano quanti pretenderebbero di dirsi persone di cultura, e magari persone dotte, e che pure irridono a questa o a quella disciplina scientifica o alla scienza nel suo complesso, proclamando in modo impudico di non averci mai capito alcunché.

Alla base, vi sono fattori filosofici decaduti nella loro essenza e nei loro fondamenti: rimangono da rimuoverne le conseguenze pratiche, e in questo le inerzie le sentiamo e le accusiamo il modo pesante. La negazione aprioristica quanto infondata del valore teoretico e conoscitivo proprio della scienza, ridotta a pura e semplice attività pratica e confusa con la tecnica, è stato uno degli effetti più pesanti di vent'anni di egemonia neoidealistica, o meglio destro-hegeliana, in Italia. Compete a noi pedagogisti, ma anche (ancor prima) ai filosofi, svelare quale sia la cornice teoretica che ha condotto a simili mostruosità, e così aiutare a superarle assieme alle sue premesse.

5. Alcuni Esempi di Strumenti Concettuali delle Scienze Naturali per la Pedagogia e la Didattica

Ma d'altra parte, se una cultura completa dal lato scientifico deve veramente assisterci, dobbiamo comprendere innanzitutto che la presenza di attriti, vale a dire di forze che si oppongono al moto in quanto tale, è un indice sicuro che ci stiamo muovendo in qualche mezzo, e il crescere degli attriti con la velocità del movimento ci testimonia che ci stiamo muovendo in un mezzo fluido. Se non incontrassimo attriti di sorta, due sarebbero le ipotesi possibili: o che ci muoviamo nel vuoto assoluto, oppure che crediamo di muoverci ma in realtà siamo fermi.

Sappiamo bene anche che cosa significhi "energia d'attivazione". Certo, se manca questa la reazione chimica non può aver corso; ma, una volta provveduto ad essa, è possibile che il processo segua il corso voluto restituendo ben di più dell'energia che lo ha attivato, e provvedendo a quell'energia che per tutti è necessaria: anche, e non è secondario, per fornire l'energia d'attivazione per altri processi.

Potremmo altresì inserire qui, come ulteriore strumento concettuale di origine scientifica ma di fruibilità pedagogica e didattica, il concetto (fisico nucleare) di *reazione a catena*; purché non omettiamo di coniugarlo con tutto ciò che porta con sé l'aggettivo “*controllata*”, sia come sostanza moderatrice e di raffreddamento, sia come barre di controllo che, all'occorrenza, interrompono tale reazione spengono il reattore.

Anche un attrito eccessivo e incontrollato produce effetti negativi e distruttivi, del resto.

Insomma, si tratta solo di pochi esempi, portati in maniera sintetica, del contributo essenziale che potrebbe avere la cultura scientifica nel fornire strumenti concettuali ed operativi a chiunque si occupi di scuola, di didattica, di educazione, di pedagogia. Integrati con strumenti filosofici, e attraverso la mediazione della filosofia, possono offrire il contributo più essenziale: esattamente come ci insegnano i percorsi di formazione di Jean Piaget, e di Maria Montessori, approdati rispettivamente alla psicologia e alla pedagogia partendo da una solida formazione scientifica, nella fattispecie biologica e medica, passando attraverso l'essenziale mediazione degli studi filosofici.

6. La Proposta di Sette “Vie di Sviluppo per la Didattica delle Scienze”

Molte sarebbero le prescrizioni, le indicazioni, le norme, le avvertenze e le altre contribuzioni che la pedagogia e la didattica (generale) odierne sono chiamate ad offrire in via essenziale a chi è chiamato ad insegnare la chimica e ad educare attraverso questo insegnamento, che sia disciplinarmente individuato, o che sia collocato in contesti più ampi e complessivi, quelle che si dovrebbero chiamare propriamente “*scienze integrate*”, oppure scienze assieme all'insegnamento matematico o comunque entro una didattica non disciplinare come deve essere quella per tutto il primo ciclo ed anche, non dimentichiamolo, per la scuola dell'infanzia dalla quale la cultura scientifica, o se si preferisce “*pre-scientifica*” ed anche “*pre-tecnica*”, dovrebbe essere presente e non in veste subordinata.

D'altra parte, riscontriamo con qualche soddisfazione, ma anche con non minori preoccupazioni per il tempo trascorso, la permanente indicazione di un certo novero di “*vie di sviluppo per la didattica delle scienze*” (sette, per la precisione) che proponevamo complessivamente già molti anni fa (Blezza 1994, pag. 160 e sgg.).

Le ricordiamo in sintesi estrema:

- I.** la fissazione di *finalità ed obiettivi dell'insegnamento* con criteri di *carattere pedagogico, e non primariamente disciplinare*;
- II.** *l'adozione della metodologia didattica “per problemi”*;

- III. *la ridefinizione del ruolo dell'esperimento nelle scienze*, superando ogni forma di induttivismo e educando ad un rapporto più complesso, articolato ed aperto tra idee ed esperienza, teoria e pratica, pensiero ed azione;
- IV. *la scelta dei contenuti con criteri pedagogici e culturali* e non necessariamente interni al sapere disciplinare;
- V. *la conseguente ristrutturazione dei contenuti* secondo un numero ristretto di temi o, meglio, di "grandi temi" e la conseguente *tematicità* della trattazione e dell'approccio alla scienza e alla cultura;
- VI. *l'introduzione della dimensione storica nell'insegnamento scientifico*, in modo organico pur se non riduzionistico;
- VII. *l'apertura delle compartimentazioni disciplinari* per una visione della scienza a scuola che avevamo proposto nel decennio precedente con la dizione "*Scienze integrate*" (che non è la traduzione di *Combined Science*) e compendiato nel volume citato di cinque anni precedente, *Educazione e scienza*, in cui titolo originario sarebbe stato *Teoria e pratica delle scienze integrate*. Esso è ormai esaurito da tempo e comunque reso obsoleto nei suoi riferimenti contestuali dalle ben note vicissitudini della riforma della scuola degli ultimi dieci anni.

Sono indicazioni generali, la cui attualità è evidente e ben nota a studiosi ed operatori, e che c'è la necessità di riproporre tali e quali nella stessa forma e nella stessa sostanza dopo tanti anni e tante riforme della scuola.

Semmai, osserviamo che l'ultimo punto trova una sua esplicazione ottimale anche in una sede come questa, che è istituzionalmente disciplinare. I contributi offerti dai didatti della Chimica spesso presentano elementi essenziali che ne rendono ragione piena. Qui ritroviamo anche una possibile apertura a discorsi che, più che non scientifici, andrebbero riferiti al *sapere tecnico*, che è altra cosa, altra forma di cultura, altro modo di conoscere, pensare, operare, interagire con la realtà.

Punti come quelli elencati alle voci IV e V potevano anche prestarsi ad una riserva come questa, ma non è così: i docenti e i didatti della Chimica dimostrano una visione abbastanza nitida del valore pedagogico e culturale di taluni elementi essenziali del sapere chimico, e di saperli svolgere in maniera abbastanza provveduta dal punto di vista metodologico. Meriterebbero maggiore ascolto da chi si occupa di pedagogia e didattica generali.

Nel condurre quei discorsi, si era tenuta ben presente una importante presa di posizione propositiva che era stata avanzata da un'altra associazione scientifica verso i rispettivi didatti disciplinaristi. Si trattava del documento espresso dalla "cugina" S.I.F. addirittura nel 1982, dal titolo "*L'impegno*

didattico della Società Italiana di Fisica"⁴; esso è stato ampiamente citato e valorizzato verso la conclusione dell'*opera citata* (Blezza 2010, pag. 259-261).

Tale documento era ricco di elementi evolutivi e positivi, quanto ben poco se ne può riscontrare come effettiva incidenza sulla ricerca didattica e sulla didassi disciplinare in fisica. Sarebbe interessante interrogarsi oggi, a tale distanza cronologica e culturale, sul perché di tale scarsa autorevolezza nello specifico, da parte di un sodalizio che invece aveva dimostrato notevole autorevolezza e capacità di incidenza culturale più generale.

7. Ricerca Didattica e Formazione dei Docenti, Competenze Disciplinari e Competenze Professionali

Un problema preliminare che dovremmo porre, e che è doveroso porre in questa sede considerata la natura e la portata di molti dei contributi qui ospitati, stava nella necessità di distinguere la *ricerca didattica* dalla *formazione continua dei docenti* (quella che si sarebbe chiamata un tempo non lontano *aggiornamento e perfezionamento dei docenti*).

Si tratta di due attività certamente connesse e non disgiunte, anzi che proprio nell'Università trovano una convergenza importantissima; ma che sono distinte in linea di principio, e che vanno deontologicamente distinte.

A tale fine, basterebbe tener ben presente che si propongono, istituzionalmente, obiettivi differenti.

Cominceremmo quindi, ciò precisato, a ricordare la necessità, anzi la deontologia, di applicarsi alla ricerca didattica (disciplinare e non) con un rigore assolutamente analogo con quello con il quale ci si applicherebbe alla ricerca in qualche settore della Chimica, come della Fisica o di altre discipline scientifiche, sia empiriche che logico-formali; e, di conseguenza, di presentare i risultati delle proprie attività sotto forma di note scientifiche che abbiano le stesse caratteristiche di metodo, di esposizione, di univocità di linguaggio, di precisione, di esclusività, di trasferibilità e via elencando, che ciascuno considererebbe necessarie ed imprescindibili per le note scientifiche all'interno della propria disciplinarietà.

Si capisce, non è possibile applicare alle note di Didattica della Chimica (o della Fisica) né la formulistica chimica né ogni sorta di simbolo o di espressione matematica con analogia organicità: ma non è questo il punto. Andrebbe piuttosto ricordato come l'epistemologia operazionistica sia sempre stata lontanissima dal cogliere il dominio della scientificità, che è assai più ampio, pur non dovendosi sottovalutare l'importanza degli studi e delle proposte di Percy W. Bridgman, né i tentativi di applicazione alla Didattica della Fisica

⁴ "Giornale di fisica", vol. XXIII, n. 2, pag. 85-91, aprile-giugno 1982.

operati da Mario Ageno; e difatti riprenderemo la questione più avanti. Si pensi a quanta notistica scientifica, del massimo livello, viene espressa in scienze a pieno titolo, autorevoli, riconosciute, forti, come ad esempio la Medicina e Chirurgia, oppure la Sistematica botanica e zoologica. Oppure si pensi a quella parte della Psicologia, che è largamente preponderante, e che non si svolge attraverso statistiche operazionali ed altri convenzionalismi sulla base di Test. Ma si pensi anche ad altre scienze, non naturalistiche né empiriche, ma che si danno norme rigorose per la loro comunicazione, come ad esempio la Giurisprudenza, oppure la Critica letteraria, o la Linguistica. La stessa Storiografia avrebbe molte cose da insegnarci nel merito, purché fatta oggetto di quel discernimento che è dovuto sempre ed ovunque a chi si occupi comunque di educazione.

La ricerca didattica è una forma di ricerca scientifica a pieno titolo, anche perché ha per suo fine l'evoluzione della conoscenza, sia pure per un tramite particolare che è costituito dall'evoluzione dei destinatari della docenza, vale a dire dall'evoluzione culturale degli allievi. Per tale è opportuno che anch'essa sia considerata, trattata ed esposta, nonché applicata: tutto ciò che attiene alla deontologia del ricercatore scientifico è opportuno che venga assunto integralmente come proprio anche dal ricercatore in didattica scientifica, come intellettuale pertinente alla sfera scientifica non solo e non tanto nella sua formazione, quanto nel suo specifico esercizio professionale.

Qui si potrebbe inserire qualche osservazione maggiormente specialistica, ma che riguarda modi di parlare e di trattare che ricorrono con una certa frequenza, e che spesso esigerebbero proprio uno specialismo che non viene contestualmente richiamato. Ci riferiamo alla considerazione relativa alla pertinenza disciplinare di una certa didattica alla stessa disciplina oggetto di insegnamento: più precisamente, a quanti considerino la Didattica della Chimica, o dalle Scienze Biologiche, o dell'Astronomia, o delle Matematiche, più o meno come una branca della stessa Chimica o delle stesse altre discipline scientifiche. Qualcuno semplifica il concetto, parlando ad esempio di "*didattica chimica*" o "*didattica fisica*"; fortunatamente, non si parla con analoga disinvoltura di *didattica logica* o di *didattica geometrica*, di *didattica chirurgica* o di *didattica astronomica*. In realtà, qualunque didattica disciplinare costituisce, in tutta evidenza, prima di tutto una branca della Didattica generale.

"*Chi sa, sa insegnare*" è uno slogan dogmatico nel quale, forse, non crede più nessuno.

La trattazione di una didattica disciplinare richiede anche competenze disciplinari essenziali, ma non solo queste: si pensi, oltre a quanto accennato circa l'impiego di simbolismi chimici o matematici, alle modalità di controllo empirico delle ipotesi didattiche esperite, e alle stesse modalità di esperimento, che non sono certo pertinenti a questa o quella disciplina scientifica, che sono di pertinenza diversa rispetto ai contenuti disciplinari; oppure, si pensi al fatto che i

problemi didattici non sono problemi disciplinari bensì educativi; od ancora, all'evidenza che il prodotto di una ricerca didattica non è a disposizione del didatta come il prodotto di altre ricerche scientifiche è a disposizione dello scienziato, anche se in entrambi i casi vale il principio della trasferibilità intersoggettiva; e via elencando differenze essenziali, che comunque rimandano ad una matrice scientifica comune.

Anche le didattiche disciplinari delle varie scienze della natura, empiriche o logico-formali e matematiche, costituiscono altrettante materie pedagogiche, altrettante *scienze dell'educazione*. Possono essere scienze come lo è la Chimica e nello stesso senso stretto nel quale lo è la Chimica, ed è opportuno che lo siano: ma si tratta di scienze differenti.

Non è possibile limitare la competenza didattica a pura e semplice competenza disciplinare: una simile visione "riduzionistica" altro non sarebbe che una riproposizione di ulteriori statuizioni di fondo che in Italia hanno avuto decenni di affermazione nella scuola sotto l'egemonia della Destra Hegeliana, sia nella versione liberista non democratica di Benedetto Croce, che nella visione organica al Fascismo di Giovanni Gentile. Le conseguenze in termini di emarginazione della cultura scientifica nella scuola e nella società, in termini di ignoranza scientifica diffusa, in termini di carenza sistematica di metodologia e di atteggiamento scientifico (anche nell'insegnamento), in termini di confusione tra scienza e tecnica, in termini di rinuncia a formare i docenti in quanto professionisti, sono troppo note per dover essere qui ribadite.

Ci dovrebbero riflettere quanti, magari sopravvalutando sé stessi e le proprie specifiche competenze, pretenderebbero di trasformarsi d'acchito, con poca o nulla mediazione, *da esperti disciplinari in didatti della medesima disciplina*: non si dimentichi che la scientificità della didattica (nonché della didassi esperita, che a sua volta è altra cosa), si riscontra negli allievi e nelle loro acquisizioni; e anche la rilevazione di questi esiti, con il relativo Feedback ovviamente asimmetrico, richiede competenze specifiche che sono sì scientifiche, ma sono anche essenzialmente differenti da quelle della Chimica, come di qualsiasi scienza della natura o scienza logico-formale che sia oggetto dell'insegnamento.

Lo stesso inquadramento storico della materia insegnata, che costituisce una risorsa importante per la relativa didattica sulla quale torneremo verso la fine, richiede altre competenze ancora. Qualcos'altro ancora si dovrebbe dire circa la formazione di uno spirito critico, che può certo richiedere competenze scientifiche, e magari si può formare egregiamente al loro interno e nel contesto del loro sviluppo, ma altrettanto certamente non si riduce ad esse.

Per questo abbiamo proposto di parlare di didattica "*scientifica*": la didattica di qualunque disciplina scientifica deve essere condotta secondo un metodo scientifico "finito", con il rigore e il fondamento empirico di tutte le branche scientifiche, il che, d'altra parte, dovrebbe valere per la didattica di

qualunque ambito culturale, sia esso riconducibile al dominio della scientificità in senso più o meno stretto o più o meno lato, oppure no.

8. Pedagogia e Scienze dell'educazione

Qui vi sarebbero da sviluppare almeno due discorsi connessi che richiederebbero un approfondimento che ne varcherebbe i limiti, anche non sarebbe di scarso interesse per i nostri lettori.

Uno riguarda il che cosa si intenda per “*scienze dell'educazione*”; l'altro, se le scienze dell'educazione siano scienze in senso stretto, e in tale ipotesi se e in che modo le scienze empiriche della natura possano farne parte.

Premettiamo che il termine “*pedagogia*”, come etimo e come significato attuale, richiede un minimo di attenzione; si vede subito che esso non ha il suffisso *-logia* comune a molte scienze sia naturali che della cultura e dell'uomo. Per questo, dobbiamo rifarci alla figura del “*pedagogo*” (*παιδαγωγός* in greco, *paedagogus* in latino), una figura delle età classiche che ha incontrato molteplici incarnazioni nella storia, di diversa dignità, sia alle origini che nei millenni successivi. Il termine astratto comparve dapprima in Latino (“*Paedagogia*”, appunto) alle fine del secolo XV, e subito dopo nel tedesco *Pädagogik*. Comprendiamo allora come la Pedagogia rappresentasse fin dalle sue radici non solo il considerare e lo studiare l'educazione e il condurre riflessioni su di essa, ma anche ed innanzitutto un farsi carico dell'educando, un prendersene cura e un prenderselo a cuore, un condurlo in quelle situazioni sociali che si ritengono le più adatte e fattive e le maggiormente propizie possibili in quel preciso momento perché la sua educazione abbia luogo positivamente, ed altresì un vigilare e controllare su queste situazioni, un riscontrarne l'esito che ne consegue.

La dizione “*pedagogia*”, insomma, è molto ampia e comprensiva. A questo punto, ci si domanda quali scienze (in senso stretto) possano considerarsi *scienze dell'educazione* in senso altrettanto stretto.

Certo, tra queste ci sono le scienze dell'ambito psicologico e neurologico, quelle dell'ambito medico (igiene, auxologia, specialità mediche della relazionalità e dello scambio d'informazione a cominciare da quelle dei sensi), quelle dell'ambito ambientale e naturalistico (ecologia, biologia, geografia), resta da chiedersi se non sia il caso di annoverarvi anche altre scienze: si pensi alla Sociologia, alla Psicologia, all'Antropologia, ma anche ad altre scienze che non hanno l'uomo come loro oggetto specifico. A suo tempo, particolarmente in *Didattica scientifica* citata, svilupparammo l'idea secondo la quale la Fisica potesse essere considerata come una scienza dell'educazione vera e propria, per il contributo concettuale che essa può dare alla riflessione pedagogica e alla mediazione applicativa tra teoria e prassi che caratterizza ogni esercizio professionale pedagogico, compreso l'insegnamento.

Allora ci apparve chiaro quanto ricco di prospettive potesse considerarsi un simile discorso, in sostanza un Transfer accuratamente mediato di strumenti concettuali ed operativi dalla ricerca nel campo delle scienze naturali e delle scienze logico-formali alla ricerca pedagogica e didattica. In fin dei conti, è quanto ha saputo fare Jean Piaget. Tale ci appare ancor oggi, e questo acuisce il rammarico per non averlo potuto materialmente seguire perché i nostri prevalenti interessi di ricerca avevano già preso un'altra piega, la professione di Pedagogista e la Pedagogia professionale e clinica (Blezza 2011 2015) e, più recentemente, la pedagogia sociale (Blezza 2010).

Tuttavia, non si tratta di una divergenza geometrica. Al contrario, abbiamo sempre ritenuto (e sostenuto) che la professione di pedagogista abbia rapporti importanti con la professione docente (Blezza 2006).. Anche l'insegnamento, come esercizio professionale, è essenzialmente *mediazione* al pari della professione di pedagogista.

Probabilmente, l'ipotesi analoga circa la chimica (come scienza dell'educazione) non sarebbe meno promettente. Si pensi al cenno che abbiamo dato allo strumento concettuale tipicamente chimico di "*energia d'attivazione*". Quanti concetti chimici sarebbero preziosi in pedagogia? Qualche esempio alla rinfusa: l'affinità chimica; acidità e basicità; valenza; sistema periodico; covalenza, polarità; dissociazione elettrolitica in soluzione, reazioni endo- ed eso-ergiche;... l'elenco sarebbe sterminato.

9. Il Riferimento all'epistemologia e alla Filosofia

Gli sviluppi innovativi in didattica scientifica, come del resto per altri settori della didattica scolastica, sono andati spesso sotto l'insegna di Popper e del razionalismo critico; il riferimento è importante, ma per noi prevale la fronte specificamente pedagogica presente nel pragmatismo classico, in particolare nei fondatori James, Peirce e Dewey.

La prescrizione per un insegnamento che si svolga attraverso la *posizione di problemi* non è poi una grande novità. Qualcuno riandrà ai progetti sperimentali per l'insegnamento delle scienze empiriche degli anni '50 e '60, e qualcun altro ricorderà György-Georges Polya e i suoi lavori sulla Didattica della Matematica (ma anche della Fisica matematizzata) fin dagli anni '40. Ma si tratta di una riproposizione di un discorso metodologico che risale in buona sostanza all'Ottocento, pur avendo radici assai più profonde e ramificate.

In precedenza, si sentiva invece riecheggiare in modo tutt'altro che lontano, e con termini e formulazioni anche troppo esplicite, una qualche forma di dualismo che riconduce, in modo non indiretto, alla dialettica chiusa tra Positivismo e Idealismo che caratterizzò buona parte del dibattito filosofico europeo del secolo XIX, e ne riassume alcune potenzialità e molti limiti: limiti

che diventano assai stringenti quando si parli di educazione e di insegnamento da un lato, e di scienza e relative valenze educative e didattiche dall'altro. Sembra a troppi autori di doversi ancora misurarsi con la versione più comune nell'ambiente, il dualismo tra didattica induttivistica e didattica deduttivistica. Da un lato, vi sarebbe una diretta esplicazione nell'impiego del laboratorio o di altre fonti empiriche in senso appunto positivistico, cioè per costruire induttivisticamente leggi e teorie come raccolte e generalizzazioni di dati d'esperienza a partire dalla mente dell'allievo considerata tabula rasa; dall'altro, una caricatura involontaria dell'Idealismo cioè l'impiego di ogni forma di strumentazione e l'accesso ad ogni e qualsivoglia fonte empirica in senso dimostrativo, per operare un disvelamento, più o meno intuitivo e più o meno creativo, di una qualche "verità scientifica" comunque preconstituita.

E pure, le cose non stanno così: basterebbe la buona professionalità dei chimici, come di qualunque uomo di scienza, ad istruire quanti ne ignorino caratteri così essenziali. Nel campo filosofico non abbiamo dovuto attendere Popper e i popperiani per renderci conto che nella ricerca scientifica il rapporto tra teoria ed esperienza, idee e fatti, uomo e realtà, creazione umana e riscontro empirico, è assai più complesso, e comunque non ha un solo verso. A ben vedere, sembra proprio che fosse prevalso nell'Ottocento in Europa un fondamentale intento iper-semplificatorio, pur all'interno di interminabili e verbosissime argomentazioni: o viene prima l'esperienza ("pura") e da questa scaturisce la teoria scientifica, o viene prima la teoria scientifica (creata dall'uomo) e l'esperienza ne segue in qualche modo. Il ragionare per dicotomie chiuse e semplificate è assai rozzo e primitivo, è in fondo infantile, anche se si ammanta di forme espressive e tecniche retoriche assai evolute. Anzi, il fatto che abbia bisogno di mentite spoglie nobili ed elevate ne riscontra ulteriormente la rozzezza e la povertà concettuale.

Anche il Pragmatismo è una teoria filosofica ottocentesca, peraltro esterna rispetto al detto dualismo "europeo", non a caso nata negli USA. Ai fondatori di quella corrente di pensiero era già chiaro, ad esempio, che la conoscenza scientifica è caratterizzata dall'esporsi organico alla possibilità di errare, cioè dal fallibilismo. Questo è esattamente quanto da lungo tempo ha riconosciuto uno dei massimi esponenti del Razionalismo critico Filosofico in Italia, Dario Antiseri, in un suo storico articolo: *"Un testo - che data verso il 1879 - e intitolato: Fallibilism, Continuity, and Evolution comincia così: «[...] ci sono tre cose che mai possiamo sperare di ottenere attraverso il ragionamento, e cioè la certezza assoluta, l'esattezza assoluta, l'universalità assoluta» [in Collected Papers, 1.141]. E se «l'esattezza, la certezza e l'universalità non si possono ottenere col ragionamento, va da sé che non esistono altri mezzi attraverso cui esse possano essere raggiunte» [C.P., 1.142]. Dopo molti anni di studio della logica della scienza, dice Peirce, la mia conclusione è che «noi non possiamo essere assolutamente certi di niente [...]» [C.P., 1.147]. Il fallibilismo*

trova sostenitori tra gli uomini animati dallo spirito della scienza [C.P., 1.141]; «esso dice solo che gli uomini non possono ottenere la certezza assoluta su questioni di fatto» [C.P., 1.149]. «Il fallibilismo è la dottrina secondo la quale la nostra conoscenza non è mai assoluta, ma nuota sempre, per così dire, in un continuum di incertezze e di indeterminazione». [C.P., 1.171]. Consapevole della funzione dell'immaginazione e del ruolo delle ipotesi nella scienza, persuaso della asimmetria logica tra conferma e smentita [C.P., 7.202], e di conseguenza assertore di un atteggiamento non verificazionista [C.P., 7.131], convinto che «l'abduzione, dopo tutto, non è altro che indovinare» [C.P., 7.218], sostenitore - in sostanza - dell'induzione intesa come analisi di fatti confermantici o confutanti una ipotesi proposta [C.P., V. 145] «L'induzione è la prova sperimentale di una teoria», Peirce non solo parla di fallibilismo, ma è il primo, per quanto io ne sappia, che parla esplicitamente di falsificazione delle ipotesi. Molti pensatori, verso la fine del secolo, avevano parlato di confutazione, smentita, contraddizione fattuale, rifiuto delle teorie. Anche Peirce usa qua e là siffatta terminologia tipica del fallibilismo. Ma la cosa notevole - che per quanto io ne sappia non è stata ancora notata - è che Peirce non usa solo l'idea di confutazione, ma - forse per la prima volta - usa in modo consapevole il termine «falsificazione» come opposto alla <<verificazione>> delle teorie.” (“Fallibilismo e falsificazione in Charles S. Peirce”⁵).

Le leggi scientifiche, si sa bene, dal punto di vista strettamente logico formale sono generalizzazioni di implicazioni: senza validità generale degli asserti entro un dato insieme o dominio non si dà conoscenza scientifica. Il vero nodo sta nel modo di raccordare il caso particolare al caso generale: e proprio l'induzione costituisce il modo più semplice e suavisivo, ma anche ingannevole, per illudersi di aver sciolto questo nodo; un altro modo è puntare alla creazione umana, ma senza sottometerla alle regole logiche ed empiriche, che sarebbe un riproporre una forma idealistica fuori contesto.

Lo stesso Peirce costruiva la base logica per un'alternativa di metodo rispetto a questo dualismo, formulando la proposta di un procedere detto per “abduzione” che non è né induttivo né ipotetico-deduttivo. In buona sostanza, si tratta di quel procedere che oggi chiameremmo “clinico”, nel senso che ciascun caso particolare esperibile è caratterizzato da singolarità ed irriducibilità; il riconducimento al caso generale può essere compiuto solo attraverso la mediazione del professionista, vale a dire introducendo il *principio antropologico*. È quello che fanno i clinici medici, che interagiscono con malati (e non con malattie) ma sono loro a ricondurli alle malattie (casi generali) attraverso la loro professionalità, e *nach bestem Wissen und Gewissen*.

Opzioni analoghe dal punto di vista metodologico si hanno nelle scienze sociali e nella pedagogia. Allora, tra la fine dell'Ottocento e i primi del

⁵ “Didattica delle scienze e informatica nella scuola”, n. 145, anno XXV, gennaio 1990, pagg. 7-8.

Novecento, il medico e psicologo William James (1890) ne sviluppò gli aspetti di sua competenza, mentre a sviluppare la dimensione sociale, come quella pedagogica, scolastica e didattica, fu John Dewey (1916, si tratta di opera fondamentale e altamente significativa, tra le innumerevoli che si potrebbero citare) con i suoi allievi.

10. Metodologia Scientifica e Didattica Scientifica

In che modo riepilogheremmo oggi lo stato dell'arte della metodologia, con particolare riguardo alla *didattica scientifica*?

Certo, non ci saremmo attesi di dover tornare fin dalla base sul tema dopo un decenni di azione volenterosa, impegnata, attenta e fin insistita; ma il realismo impone anche questo. Vediamone una sintesi estrema per punti, rimandando alle *opere citate* e relative bibliografie per i dettagli.

- Oggi, sinteticamente, concorderemmo nel considerare la Chimica, e le scienze in genere, come delle *costruzioni umane, fatte per tentare di risolvere problemi posti dall'uomo*; ma una qualche eventuale tentazione idealistica (o, meglio, hegeliana) al riguardo si dissolve subito.
- Prima di tutto, *le ipotesi formulate hanno la necessità di essere collocate entro teorie scientifiche più generali e queste entro discipline*.
- In tale collocazione vi è la necessità del rispetto delle *regole della coerenza logica, o "coerenza interna"*. Qui si ferma la normatività minima delle scienze matematiche e logico-formali.
- Tra le scienze vi sono, poi, quelle che diremmo "empiriche", tra le quali la chimica, che debbono rispondere anche ad un'altra forma di coerenza cioè quella con l'esperienza "futura", vale a dire con *l'esperienza che si va a fare dopo la formulazione delle ipotesi, per metterle alla prova e per renderne rigorose le dipendenze matematiche e linguistiche*, per determinarne costanti e variabili, dipendenze funzionali qualitative e quantitative, e quant'altro di analogo.
- Le regole dei due diversi ordini di coerenza si coniugano con la necessità di un *riferimento storico essenziale*, ed ancora con la deontologia della *critica* (come atteggiamento e come prassi).
- Il vaglio dell'*esperienza futura* offre una *retroazione* (o *Feedback*) "asimmetrica", nel senso che non è mai possibile avere verificazione per quante conferme si ottengano, mentre basta una falsificazione ad inficiare logicamente le ipotesi e tutto il sistema

di pensiero nel quale sono inserite. Non si dispone, insomma, di criteri di verità, mentre si dispone di criteri di falsità.

Il tutto rende bene l'idea della cultura scientifica come *atto di creazione umana*, storicizzato e contestuale, ma come atto di creazione non arbitrario. Del resto, oggi non considereremmo arbitrario, idealisticamente, nessun atto di creazione umana, foss'anche una teoria filosofica, o una creazione letteraria, musicale, figurativa, "artistica" in genere nel senso stretto.

Ciascuna arte è creazione umana, e ciascuna arte ha le sue regole, storicamente e culturalmente contestualizzate.

Anche la Didattica lo è: chiedersi, oggi, se sia "arte" o scienza o tecnica o che altro rimanda alle norme di metodo cui ottempera la creazione didattica: la domanda equivale a chiedersi se sia una forma d'arte, o un'altra forma d'arte, od un'altra ancora. La "*didattica scientifica*" come l'abbiamo teorizzata (nelle *opere citate*) è una scienza empirica in quanto rispetta le medesime regole delle altre scienze empiriche, pur non essendo certo una scienza "naturale".

Chiaramente, per capire in che senso la Didattica sia una scienza, e per quali ottime ragioni è opportuno che venga considerata e trattata come tale, occorre avere dimestichezza con la ricerca scientifica propriamente detta. Lo diciamo con riferimento ad altri ambienti che non sono quello della Chimica e relativa ricerca didattica e formazione continua dei docenti: ma, semmai, a qualche ambiente più vicino a chi scrive. Spesso, chi ambisce (o agogna) ad una Didattica come scienza senza avere competenze scientifiche in senso stretto, senza avere effettiva conoscenza ed esperienza di ricerca scientifica propriamente detta, parla di una scienza che non esiste, di una scienza come gli piacerebbe che fosse, o di una scienza come sarebbe economico per i suoi propri lavori che fosse. Per questo c'è bisogno di scienza e di scienziati, in senso stretto (sia accademico che comune), e di chimici tra i primi. Del ricercatore scientifico (del chimico, del fisico, del medico, del matematico, del naturalista, del logico, ...), della relativa cultura e della relativa esperienza, chiunque si occupi di educazione e di insegnamento ha assoluto bisogno: anche se insegna Latino e Greco, Storia e Storia della Filosofia, Lingua e letteratura italiana o Lingue e letterature moderne, e via elencando.

Peraltro, non è vero che questo basti: qui va citato il detto documento S.I.F. del 1982, in particolare là dove stigmatizzava il fatto che "*La didattica della fisica, ossia la scienza che si propone di esporre e spiegare la fisica perché altri l'apprenda, spesso non viene trattata con la dignità e l'impegno di un settore scientifico propriamente detto. [...] Questi contributi [...] ben di rado vengono impostati con una metodologia simile a quella con cui, magari gli stessi autori, sono soliti esporre le loro attività di ricerca nel settore della fisica. Inoltre anche i cosiddetti lavori di ricerca nel campo della didattica fisica risultano molto spesso carenti di questa o quella parte, che risultano viceversa*

*indispensabili per poter identificare un'attività culturale come «attività di ricerca»*⁶. Ma le citazioni possibili sarebbero molteplici (Blezza 1994, pag. 259-261). Grande, comunque, ne è la testimonianza di rigore, critica, auto-correttività, apertura evolutiva, che sono così tipici della ricerca scientifica, e così lontani da altri saperi.

La competenza scientifica di ricerca, quindi, è necessaria ma non basta; e comunque essa va tenuta sempre presente con la massima attenzione e con il rigore necessario.

11. I Limiti dell'operazionismo

Ci rimangono solo poche righe per tornare su alcune altre questioni che ricorrono nell'ambiente scolastico e di ricerca nel quale si muove questa rivista.

Tra le varie teorie epistemologiche dell'ultimo secolo, riemerge a tratti proprio quello stesso *Operazionismo* cui si è accennato assieme ai suoi limiti insuperabili. Esso è utile e, a volte, fin necessario; ma non costituisce condizione di scientificità. Se malinteso, finisce per diventare un ostacolo ad una buona didattica.

I pregi della dimensione operativa, in Chimica come in Fisica, sono evidenti e non discussi, così come essa va applicata anche nel campo educativo, didattico e culturale; anzi, dovrebbe esser ben chiaro quanto potrebbe divenire diseducativa, incolta, rozza e incivile una trattazione scientifica che omettesse di fare i conti con quanto nella scienza vi è di operativo. Lo si vede bene dal modo nel quale vengono trattate tante questioni che richiedono un componente scientifico essenziale e alle quali si è accennato, dall'ambiente alle fonti di materia ed energia, dall'alimentazione all'atmosfera al buco nell'ozono, dall'acqua all'aria all'agricoltura, e via elencando a piacere. Proprio la mancanza di una corretta dimensione operativa rende meglio il senso incolto, anti-scientifico e fin anti-umano nel senso di condizionante, che caratterizza troppi messaggi di propagando in materia.

Una dose organica di operatività, dunque, è necessaria, e probabilmente non è ancora venuto il momento di poter accantonare le critiche che da decenni si appongono ad un insegnamento verboso e argomentativo, retorico e chiacchierone, che ha funestato tutte le discipline, ma che in quelle scientifiche dimostra più chiaramente il suo aspetto incolto e diseducativo, e nella chimica in modo del tutto particolare.

Detto tanto, dobbiamo ribadire che la teoria sulla scienza fondata da Bridgman ha avuto indubbi meriti nel rimarcare l'esigenza di rigore e di formalizzazione, ma ha dimostrato anche i suoi limiti stringenti: la scienza, e la chimica in particolare, è anche operatività e formalismo, è queste cose necessariamente; ma ad esse non si può certo ridurre.

⁶ Pag. 86.

12. La Dimensione Storica nell'insegnamento Scientifico

L'importanza di una *dimensione storica* in ogni insegnamento scientifico è da tempo riconosciuta. Come norme di legge, potremmo risalire addirittura fino ai programmi medi del 1979⁷.

In questi, nel brano riguardante le “*Scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali*” vi era in particolare un interessante paragrafo dal titolo “*Avviamento alla dimensione storica della scienza*” che così recitava: “*L'insegnante di scienze avvierà l'alunno ad una prima riflessione sulla dimensione storica della scienza, presentando, con esempi significativi, sia le linee di sviluppo della scienza dal suo interno, sia la stretta correlazione esistente fra l'evoluzione scientifica e quella della condizione umana.*” Si noti che riguardava anche le scienze matematiche. Né sarebbe l'unico brano citabile, ad esempio, poco più avanti tra le “*Indicazioni per le scienze sperimentali*” spiccava “*Acquisire consapevolezza della continua evoluzione delle problematiche e delle conoscenze scientifiche.*”.

In evidente continuità logica e cronologica, i Programmi elementari, finalmente riformati qualche anno dopo⁸, si chiudevano con queste ben precise “*Indicazioni didattiche*”: “*La motivazione potrà essere rafforzata anche facendo richiamo alla storia della scienza: vi si ritroveranno molti riferimenti a progressi che si sono verificati proprio in conseguenza dell'accertata inadeguatezza di spiegazioni date in precedenza sulla base di conoscenze e tecniche di indagini più limitate.*”.

Sarà il caso di ricordare, molto brevemente, che i programmi precedenti per le scuole elementari risalivano a circa trent'anni addietro⁹: essi non prevedevano un insegnamento di scienze bensì un'appendice scientifica agli insegnamenti di storia e geografia e solo per il II ciclo, con norme che si chiudevano con questa raccomandazione: “*L'insegnante non manchi, infine, di avviare il fanciullo alla contemplazione della bellezza della natura, coronando così, anche ai fini spirituali ed estetici, lo studio dell'ambiente. Da tale contemplazione parta per coltivare nell'alunno quel rispetto verso le piante, gli animali e quanto altro fa parte del paesaggio; rispetto che è segno di gentilezza d'animo e di consapevolezza civile.*”. Erano i programmi del “*fanciullo, tutto intuizione, fantasia e sentimento*” del quale si sceglieva di ignorare la dimensione razionale.

Quel ciclo di riforme si è chiuso agli inizi degli anni '90, con i nuovi orientamenti per la scuola “materna”; con la fine della cosiddetta “prima repubblica” sono rimasti fuori i provvedimenti relativi alle scuole superiori e

⁷ D.M. 9 febbraio.

⁸ D.M. 104 del 12 febbraio 1985 n. 104.

⁹ D.P.R. n. 503 del 14 giugno 1955.

all'università; in seguito alle riforme si sono avvicinate di legislatura in legislatura. Anche al di là della critica per riforme della scuola a ritmi troppo serrati, a scadenze troppo ravvicinate, perché se ne possono apprezzare i caratteri e se ne possono correggere le eventuali manchevolezze, non sarebbe comunque una buona strategia per la ricerca didattica considerata come scienza, che abbia per oggetto la chimica o qualunque altro settore della cultura umana, l'inseguire il legislatore e le alternanze di maggioranza da una legislazione all'altra, soprattutto quando esse sono perlopiù a scadenza anticipata. La ricerca offre, semmai, delle idee delle quali il legislatore potrebbe tenere maggior conto. La professionalità docente deve essere sostenuta indipendentemente dalle dinamiche parlamentari e governative.

Tornando al nostro discorso, vediamo sinteticamente tre aspetti di fondo del rapporto tra storia e didattica delle scienze, e della Chimica in primo luogo.

- I.** Innanzitutto, la conoscenza scientifica perde gran parte del suo significato umano e cognitivo se non viene storicizzata; si dice un'ovvietà che nessuno mette in dubbio per qualunque altro campo del sapere umano che trovi svolgimento a scuola, e non solo a scuola. Sarebbe impensabile, ad esempio, lo studio di una creazione letteraria, o di una teoria filosofica, o di un'opera di musica o di arti figurative, senza collocarle con la massima cura nel loro contesto storico e culturale; ebbene, ciò vale esattamente allo stesso modo per le leggi e le teorie scientifiche, nonché per le conquiste della tecnica.
- II.** In secondo luogo, è la storia umana a perdere gran parte del suo significato se non se ne considera la dimensione scientifica e quella tecnica; come comprendere l'Evo otto-novecentesco senza la macchina a vapore e l'evoluzione della scienza del periodo? Come l'Evo moderno senza la scienza di Linneo, Galileo, Newton, Cartesio, Pascal, e via elencando? Come la cultura greca senza la sua Matematica e la sua Astronomia? Come il Novecento senza le onde elettromagnetiche e l'elettromagnetismo? E via elencando a piacere.
- III.** Ultimo ma non per ultimo, come cogliere il senso educativo e culturale profondo della scienza quale sapere fallibile, sempre ipotetico e in continuo divenire, senza la dimensione storica? Non occorre l'autorità di Thomas S. Kuhn per ricordarci che delle conoscenze scientifiche assolutizzate nella cristallizzazione a-storica, quale le si trovano in certi manuali, non consentono di cogliere il profondo significato umano della scienza.

Nell'ottemperanza canonica a queste considerazioni di fondo, occorre guardarsi dal rischio dell'eccesso integralista, che vorrebbe l'insegnamento scientifico integralmente storicizzato, e svolto non ispirandosi al suo svolgimento storico, bensì su di esso rigidamente ricalcato.

Come per tutti gli integralismi e per tutti gli eccessi, la scienza dovrebbe recare in sé i giusti antidoti; ma pare che non li rechino in loro stessi non pochi scienziati, esperti, didatti e metodologi della scienza, o sedicenti tali, o tali auto-proclamatisi. Si tratta di *informare la didattica scientifica alla storia della scienza*, non di confondere le due discipline; non è, in particolare, la storia della scienza che disegna o determina la relativa didattica, ma semmai è la didattica della scienza che si avvale della storia del pensiero scientifico.

Essa dovrebbe avvalersi, d'altronde, anche della storia della tecnica, che è una storia diversa.

La dimensione storica sia dunque organica nella didattica della Chimica, ma senza alcun riduzionismo. Negli anni '80, tra i didatti della Fisica circolò una dizione espressiva a tal fine, quella del ricorso alle “*small Injections*” di storia nella didattica, avendo come esempio storico il *Biological Sciences Curriculum Study* (B.S.C.S.), e come deuteragonista concreto il *Project Physics Course* (P.P.C.) del quale circolavano versioni in italiano anche dimensionate come libri di testo, e arricchite da ogni forma di materiale integrativo.

Potrebbe essere interessante, a questo fine, rileggere le note scientifiche originali relative ai passi fondamentali della Chimica moderna e, in certi casi, anche della Chimica contemporanea. Ovviamente, questo vale per la formazione iniziale e continua dei docenti, e per la formazione di base dei ricercatori in educazione scientifica e in didattica della chimica (come di altre scienze naturali o logico-matematiche e formali).

Taluni brani di queste opere potranno però essere portati direttamente anche agli allievi, sotto forma di estratti brevi o “pezzulli”, come talune tabelle e talune illustrazioni: il che contribuirà da un lato ad integrare una base empirica che non può certo essere solo sperimentale, e dall'altro a rendere meglio l'idea della dimensione storica della ricerca chimica e del ruolo della chimica nella storia dell'uomo e della cultura.

13. La Parola agli Insegnanti

Altro si potrebbe dire ancora, ma l'essenziale c'è; il resto, tutto il resto, si trova in quel patrimonio di conoscenze, competenze, esperienze dei quali sono custodi, latenti e cultori i didatti della chimica, gli studiosi, i formatori, gli stessi docenti.

Non vi è, dunque, alcuna conclusione da trarre: vi è da passare il testimone alle loro mani, certi che si tratta di un passaggio in ottime mani.

BIBLIOGRAFIA

- Antiseri D. (2001) *Teoria unificata del metodo*, UTET Università, Torino 2001.
- Blezza F. (1994): *Didattica scientifica*. Del Bianco, Udine.
- Blezza F. (2006) *Il professionista dell'educazione scolastica*. Pellegrini, Cosenza.
- Blezza F. (2010): *La pedagogia sociale*, Liguori, Napoli.
- Blezza F. (2011) *Pedagogia della vita quotidiana*, Pellegrini, Cosenza.
- Blezza F. (2015) *Che cos'è la pedagogia professionale*. Ilmiolibro Gr. Ed. L'Espresso, Roma.
- Dewey J. (1916) *Democracy and education: an introduction to the philosophy of education*, The Macmillan Company, New York. In the Web.
- James W. (1890) *The principles of Psychology* 2 vols., Henry Holt and Co., New York. In the Web.
- Kuhn, T.S. (1962) *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, Chicago.
- Laeng M. (1990) *L'educazione nella civiltà tecnologica. Un bilancio preventivo e consuntivo*, Armando, Roma.
- Laeng M. (1991) a cura di *Atlante della pedagogia volume 2 Le didattiche*, Tecnodid, Napoli.
- Laeng M. (1998) *Insegnare scienze*, La Scuola, Brescia.
- Laeng M. (2001) *Unità della cultura e costruzione dei concetti scientifici*, Pensa Multimedia, Lecce.
- Lakatos I, Musgrave A. (1970) (eds.) *Criticism and the Growth of Knowledge* Cambridge University Press. In the Web.
- Lakatos, I: (1978) *The methodology of scientific research programmes*. Cambridge University Press, Cambridge. In the Web.
- Peirce C. S. *Collected Papers* 8 vols. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts. In the Web.
- Popper K. R. (impressum 1935, tatsächlich 1934) *Logik der Forschung - Zur Erkenntnistheorie der modernen Naturwissenschaft*. Springer-Verlag, Wien. In the Web.
- Reale G. Antiseri D. Laeng M. (1991) *Filosofia e pedagogia dalle origini ad oggi*, La Scuola, Brescia.
- Visalberghi A. (1978) *Pedagogia e scienze dell'educazione*, Milano, Mondadori.

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaustione all'integrale definito¹²

Mario I. Mandrone

Università del Sannio
Benevento
almavit@libero.it

Sunto

La creazione del calcolo (differenziale, nella terminologia leibniziana flessionale in quella di Newton) è l'evento che, nella seconda metà del seicento, ha segnato, in un certo senso, il passaggio dalla matematica classica a quella moderna. Obiettivo del presente lavoro è una analisi storica ed epistemologica della questione del rigore e della "metafisica" del calcolo infinitesimale che tenga conto dei metodi degli antichi (ad es. del metodo di esaustione di Archimede), nonché delle interpretazioni di Leibniz e Newton e dei loro successori. Il problema della ricerca di un fondamento sicuro su cui basare il calcolo infinitesimale, intravisto da D'Alembert nella teoria dei limiti e ripreso da Lagrange con la teoria delle serie infinite e quella delle funzioni derivate, trova in Cauchy il pioniere di un nuovo modo di ricercare il rigore in analisi. L'impostazione di Cauchy sarà resa rigorosa da Weierstrass nella seconda metà dell'800 con la definizione di limite, col metodo dell'epsilon-delta, che a sua volta si basa su definizioni concernenti i numeri reali. In questo senso si parla di "aritmetizzazione" dell'analisi.

¹ "Come espressione della mente umana la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica." da Richard Courant-Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica?* Universale Bollati Boringhieri.

² "Siccome il ferro s'arrugginisce senza l'esercizio e l'acqua si putrefa o nel freddo s'addiaccia, così l'ingegno senza esercizio si guasta." dal Codice Atlantico di Leonardo da Vinci

Parole chiave: metodo di esaustione, metodo dei teoremi meccanici, calcolo sublime, fluenti e flussioni, teoria dell'integrazione, numeri iperreali, analisi non-standard.

1. Introduzione

L'analisi infinitesimale nacque verso la fine del XVII secolo per opera di Newton e Leibniz, anche se, in realtà, le sue origini sono molto più antiche. I ragionamenti di Zenone d'Elea, le dimostrazioni di Eudosso, i calcoli di Archimede e, più tardi, i lavori di Cavalieri, Galileo, Torricelli, Pascal e Fermat furono determinanti nel creare le condizioni perché finalmente si potesse costruire in modo organico questa nuova disciplina, che, inizialmente, prese il nome di "Calcolo sublime". Già nell' antichità si incontrano, difatti, metodi che si possono considerare di natura infinitesimale. Uno di questi è il metodo di esaustione, scoperto quasi certamente da Eudosso di Cnido e utilizzato per primo da Archimede per calcolare le aree di figure a contorno curvilineo. Eudosso era nativo di Cnido, ma pare avesse viaggiato molto durante la sua vita: in Egitto, nella Magna Grecia, in particolare a Taranto, dove ebbe contatti con Archita; ad Atene dove frequentò la scuola di Platone ed infine a Cizico, sulle coste dell' Asia Minore, dove fondò la sua scuola. L'idea fondamentale del metodo di esaustione risiede nella possibilità di avvicinarsi sempre di più al contorno di una linea curva con delle spezzate, i cui estremi giacciono sulla linea, con lati sempre più numerosi e corti. Anche se tale procedimento può sembrare approssimato, Eudosso riuscì a trasformarlo in un ragionamento logicamente rigoroso mediante la proposizione – nota come "assioma di continuità- che serve come base per il metodo di esaustione. Essa afferma: "date due grandezze aventi un certo rapporto (cioè nessuna delle quali sia zero), è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra grandezza." Partendo da questo assioma di Eudosso si può, con una "reductio ad absurdum". Dimostrare una nuova proposizione (proprietà di esaustione): "se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata." Negli Elementi di Euclide d'Alessandria ritroviamo le due proposizioni sopra riportate: la prima come definizione (definizione IV del V libro) e la seconda come teorema (proposizione I del X libro). Queste due proposizioni accettano evidentemente l'infinito potenziale.

2. Il metodo di esaustione

Essenzialmente il metodo di esaustione consiste in un'argomentazione logica che rappresenta la struttura della dimostrazione e in un nucleo centrale

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaustione all'integrale definito

che consente all'argomentazione logica di procedere e concludere. Archimede attribuisce a Eudosso la dimostrazione, con questo metodo, del fatto che il volume del cono è uguale a un terzo del volume del cilindro avente stessa base e stessa altezza. Lo stesso Archimede di Siracusa verifica, utilizzando il metodo di esaustione, formule intuitive facendo uso di metodi meccanici e considerazioni di tipo fisico. Figlio dell'astronomo Fidia che aveva calcolato il rapporto esistente tra le grandezze del Sole e della Luna, Archimede (287-212 a.C.) nacque a Siracusa e studiò ad Alessandria. Cultore di geometria e di meccanica, dedicò a studiosi alessandrini, ai quali era legato da profonda amicizia, gran parte delle sue opere, tra le quali ricordiamo:

- Sulle spirali – costituito da 28 proposizioni, molte delle quali riguardano aree associate con la spirale. Per dimostrare la verità di tali proposizioni l'autore usa il metodo di esaustione.
- Misura del cerchio- un libretto di poche pagine che contiene solo tre proposizioni. Nella prima dimostra che l'area del cerchio vale πr^2 : "L'area del cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo con un cateto uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza."
Area cerchio = A Area Triangolo = T A= T ove $T = \frac{1}{2} rC = \frac{1}{2} r * 2\pi r = \pi r^2$. Per arrivare a questo risultato Archimede usa il metodo di esaustione, calcolando il perimetro di poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza fino a inscrivere e circoscrivere poligoni di 96 lati.
- La quadratura della parabola- il più popolare tra i trattati che si occupano del metodo di esaustione. Archimede riesce a dimostrare rigorosamente che l'area di un segmento parabolico è uguale ai $\frac{4}{3}$ dell'area di un triangolo avente stessa base e stessa altezza del segmento parabolico.
- Il Metodo- ritrovato solo nel 1906, contiene una quindicina di proposizioni inviate, sotto forma di lettera, al suo amico Eratostene. In esso Archimede fa espresso riferimento al modo di condurre l'analisi preliminare di un problema per poter arrivare a una trattazione rigorosa della sua risoluzione.
- Sulla sfera e il cilindro.
- L'arenario.

Quasi due millenni dopo Archimede, il metodo di esaustione viene sostituito dal "metodo degli indivisibili" per opera soprattutto di Keplero, Cavalieri, Torricelli: tale metodo è certamente più agile e veloce, ma molto meno rigoroso. La proposizione fondamentale del metodo degli indivisibili è il principio di Cavalieri, secondo il quale " se due solidi hanno la stessa altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi ed equidistanti da esse stanno sempre in un fissato rapporto, allora anche i volumi di tali solidi stanno nello

stesso rapporto”. Questo nuovo metodo non usa più, se non raramente, la dimostrazione per assurdo, ma si serve della più lineare dimostrazione diretta. Le applicazioni pratiche del metodo degli indivisibili superano le potenzialità certamente limitate del metodo di esaustione ma, non avendo ancora un adeguato impianto concettuale e formale, costituiscono solamente una teoria intuitiva e debole dal punto di vista del rigore matematico. Solo con la nascita dell’analisi matematica avviene la vera rivoluzione, grazie all’innovativa considerazione del concetto di differenziale.

3. Il metodo di esaustione –Intuizione e rigore in Archimede

È un metodo che affonda le sue radici nelle considerazioni di tipo infinitesimale dei filosofi del V secolo a.C. Anassagora e Democrito e nella critica di Zenone di successioni finite ed infinite. Non va dimenticato che la matematica greca rifiuta l’infinito attuale e accetta solo l’infinito potenziale. Nella risoluzione di problemi di misura si instaura una metodologia che prevede due fasi:

- La ricerca del risultato con le tecniche più disparate, anche quelle non molto affidabili né rigorose (fase euristica)
- La dimostrazione del risultato per via rigorosa (fase dimostrativa)

Il metodo di esaustione interviene proprio nella seconda fase. Si tratta infatti di un metodo dimostrativo rigoroso che si utilizza però, quando già si intravede o si conosce il risultato. Tale metodo venne proposto da Eudosso di Cnido (408-355 a. C.) del quale però non ci sono rimaste che testimonianze indirette. Esso si basa su una proposizione detta “Postulato di Eudosso” o anche “assioma di Eudosso-Archimede”, molto sfruttata da Archimede nelle sue opere: “ Date due grandezze A e B con $A < B$, esiste un numero intero n tale che $nA > B$ cioè un multiplo di A è maggiore di B”. Oppure, espresso sotto altra forma:” Date due grandezze omogenee A e B, con $A < B$, esiste sempre un sottomultiplo di B minore di A, cioè esiste m tale che $\frac{1}{m} B < A$ ". Versione Euclidea: “Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate separarsi reciprocamente”. Ad es., per dimostrare che due grandezze U e V sono uguali fra loro, si procede col metodo di esaustione ad una doppia riduzione all’assurdo.

4. Il segmento parabolico

Nel trattato la “Quadratura della parabola”, Archimede utilizza il metodo di esaustione per determinare l’area di un segmento parabolico; metodo basato sul “bilanciamento” di un dato insieme piano con un altro di area nota o

facilmente calcolabile. In tal modo, infatti, egli trovò che l'area del segmento parabolico è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto a tale insieme (avente cioè un lato coincidente con la base del segmento parabolico ed il lato opposto tangente al segmento stesso) ovvero i $\frac{4}{3}$ del triangolo inscritto nel segmento parabolico (avente la base coincidente con quella del segmento parabolico ed il vertice opposto coincidente con il punto di tangenza della parabola alla base). Ma Archimede stesso considerò questo come un procedimento teso a verificare in maniera "meccanica" una sua intuizione che andava comunque successivamente dimostrata in maniera rigorosa. A tal fine applicò il cosiddetto "metodo di esaustione" ottenendo il valore dell'area cercata attraverso approssimazioni successive. Il metodo consisteva nel costruire una serie di figure inscritte nel segmento parabolico le cui aree determinavano una successione crescente. La proprietà fondamentale utilizzata per determinare le aree di queste figure è l'additività della misura. L'additività della misura suggerisce un procedimento generalizzabile per la determinazione di aree di figure a contorno curvilineo. Ripercorrendo il procedimento "geometrico" di Archimede, si può approssimare l'area del segmento parabolico S con le aree di plurirettangoli (cioè insiemi piani decomponibili in un numero finito di rettangoli) contenuti e contenenti S. Più è alto il numero dei rettangoli che compongono i plurirettangoli, più le aree di quelli contenuti in S si avvicinano alle aree di quelli contenenti S. Se le aree dei plurirettangoli contenuti sono sempre minori delle aree dei plurirettangoli contenenti, e se questi due insiemi numerici costituiscono due classi di insiemi contigue, allora il nostro insieme è misurabile. In tal caso l'area di S sarà il numero reale non negativo individuato dalle due classi. Esistono insiemi per i quali la classe delle aree dei plurirettangoli contenuti e quella delle aree dei plurirettangoli contenenti S non costituiscono una coppia di classi contigue; tali insiemi si dicono non misurabili e per essi non è definita alcuna area. Situazioni del genere, però, non possono presentarsi se ci si limita a considerare dei rettangoloidi relativi a funzioni continue in intervalli chiusi e limitati. Per calcolare l'area del poligono inscritto nel segmento parabolico, Archimede somma le aree dei triangoli inscritti; deve cioè calcolare la somma di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ dove il primo termine è l'area del triangolo ABC. Archimede evita di calcolare la somma della serie, ma calcola la somma dei primi n termini ai quali aggiunge il resto $\frac{1}{3} * \frac{1}{4^{n-1}} A$ (Prop. 23) e ricorre all'identità:

$$A + \frac{1}{4} A + \frac{1}{4^2} A + \frac{1}{4^3} A + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} A + \frac{1}{3} \frac{1}{4^{n-1}} A = \frac{4}{3} A$$

Se il numero dei lati del poligono inscritto, cioè il numero dei termini della serie, aumenta, il resto $\frac{1}{3} * \frac{1}{4^{n-1}} A$ diventerà piccolo a piacere e l'area

cercata varrà $\frac{4}{3} A$. Oggi, avendo una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4}$, calcoleremmo il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(A + \frac{1}{4} A + \frac{1}{4^2} A + \frac{1}{4^3} A + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} A \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} *$$

$A = \frac{4}{3} * A$, che è, appunto, il risultato ottenuto da Archimede. Archimede, ovviamente, non esprime l'idea che il resto tenda a zero (non esegue passaggi al limite) e che la somma della serie sia uguale a $\frac{4}{3} A$. Dimostra, invece, per assurdo, che l'area K del segmento parabolico non può essere né inferiore né superiore a $\frac{4}{3} A$. Vediamo, quindi, che nell'applicazione concreta del metodo, Archimede evita di utilizzare una nozione così oscura come quella di poligono con un numero infinito di lati che, al limite, coinciderebbe con il segmento parabolico. Il metodo di esaurimento, con il suo doppio ragionamento per assurdo, evita ingegnosamente le considerazioni infinitesimali.

5. Il metodo dei teoremi meccanici

Nelle opere di Archimede le dimostrazioni sono rigorose, ma viene tenuto nascosto il procedimento per ottenere effettivamente il risultato. L'esposizione parte da principi semplici per giungere mano a mano a proposizioni più complesse. Nelle dimostrazioni finali e nella stessa struttura dell'opera "Sulla sfera e sul cilindro" si vede, però, che Archimede già conosceva il risultato, ottenuto per altra via. È questo un modo di procedere comune a molti matematici, non solo greci. Fino al 1906 non si conosceva il metodo euristico utilizzato da Archimede per ottenere i suoi risultati. Nel secolo XVII si parlava spesso di una "via segreta" di Archimede. Sia Torricelli che Wallis ed altri ancora erano infatti convinti che il matematico di Siracusa avesse volutamente occultato questa "via". È soltanto nel 1906 col ritrovamento da parte di Heiberg di una lettera di Archimede ad Eratostene che tale via si è palesata. Nel "Metodo sui teoremi meccanici" il termine "meccanico" è semplicemente derivato dal fatto che vengono utilizzati concetti di meccanica, quali la leva in equilibrio, la posizione del baricentro. Archimede sceglie opportunamente le figure note da confrontare con quelle "ignote", di cui deve cercare l'area. In che cosa consiste il metodo meccanico di Archimede? Per determinare l'area di una superficie piana limitata da una curva chiusa, si cerca una seconda curva da confrontare con essa. La curva viene pensata contenuta entro due rette parallele r ed s e tangenti la curva, mentre la seconda figura deve essere tale che:

- Se ne conosca l'area;
- Si conosca la posizione del baricentro.

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaustione all'integrale definito

Si immagina di sezionare le due figure con una retta t parallela ad r ed s . Poiché t è una retta generica, si immaginano tutte le rette intersezione che, secondo una concezione ardita, costituiscono la figura la cui area è da determinarsi. Si ottiene che il rapporto tra le due aree (area da determinare/ area nota) è uguale al rapporto fra le lunghezze di due segmenti noti (principio della leva). Noto tale rapporto, è possibile calcolare, pertanto, l'area incognita.

Il mistero di Archimede. E' con Archimede che la scienza antica raggiunge le sue vette più alte. Il postulato di Archimede sta alla base dei moderni trattati di calcolo. Il matematico siracusano enuncia il suo postulato in termini geometrici: "Che inoltre per le linee disuguali e per i solidi disuguali, il maggiore superi il minore di una grandezza tale che addizionata a se stessa possa superare qualunque grandezza data, tra quelle che si possono paragonare tra loro"(Archimede, Opere, *Sulla sfera e il cilindro*, postulato V). Oggi esso viene assunto come un postulato del sistema dei numeri reali, dopo l'arimetizzazione dell'Analisi nella seconda metà dell'Ottocento con Cantor, Dedekind e Weierstrass: "Se a e b sono due numeri reali positivi del sistema, e $a < b$, esiste sempre un numero reale n tale che sia $n a > b$." Nel Cinquecento e nel Seicento, con la scoperta e lo studio delle opere di Archimede, si diffonde intorno alla sua figura una certa aria di "mistero". Studiata da Galileo "con infinito stupore" (G. Galilei, *Opere*, Utet, Torino, 1964, Vol. II, p 613) e ammirazione, venerato da tutti gli scienziati di quel tempo per le sue ardite invenzioni e preso come modello di rigore, Archimede fa sorgere sulla sua opera la convinzione, che diventa anche leggenda, "che egli abbia di proposito ricoperto le tracce della sua investigazione, come se avesse sepolto per la posteriorità il segreto del suo metodo di ricerca" (così si esprimeva il matematico Wallis nella sua *Arithmetica infinitorum* del 1665). E' solo nel 1906, grazie al filologo danese J.L.Heiberg, editore delle opere di Euclide e Archimede, che si dirada l'aria di mistero. In un antico palinsesto ritrovato a Costantinopoli presso il monastero del Santo Sepolcro, viene alla luce una importante opera di Archimede, indirizzata ad Eratostene di Alessandria, in cui sono dimostrati alcuni teoremi meccanici, attraverso i quali Archimede svela come sia riuscito a calcolare l'area del segmento parabolico, il volume della sfera, l'area della sua superficie, i volumi del cono e del cilindro. Così Archimede scrive ad Eratostene: "Vedendoti poi diligente ed egregio maestro di filosofia, e tale da apprezzare anche nelle matematiche la teoria che (ti accada di considerare), decisi di scriverti e di esporti nello stesso libro le caratteristiche di un certo metodo, mediante il quale ti sarà data la possibilità di considerare questioni matematiche per mezzo della meccanica. E sono persuaso che questo (metodo) sia non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. E infatti alcune delle (proprietà) che a me dapprima si sono presentate per via meccanica, sono state (da me) più tardi dimostrate per via geometrica, poiché la ricerca (compiuta) per mezzo di questo

metodo (del metodo meccanico) non è una (vera) dimostrazione: è poi più facile, avendo già ottenuto con questo (metodo) qualche conoscenza delle cose ricercate, compiere la dimostrazione, piuttosto che ricercare senza alcuna nozione preventiva. Perciò di quei teoremi dei quali Eudosso trovò per primo la dimostrazione intorno al cono e alla piramide, (cioè) che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide è la terza parte del prisma, aventi la stessa base e altezza uguale, non piccola parte (del merito) va attribuito a Democrito, che per primo fece conoscere questa proprietà della figura suddetta, senza dimostrazione”(Archimede, *Opere*, Utet, 1974, p. 572). In sostanza Archimede afferma nella lettera ad Eratostene di avergli precedentemente inviato alcuni teoremi che aveva scoperto limitandosi, però, a fornirgli solo gli enunciati e invitandolo a trovare le dimostrazioni che non aveva ancora indicato....” Sono ora le dimostrazioni di questi teoremi che io ti invio redatti in questo libro. Ma prima, come ti avevo detto, dato che tu sei uno studioso e domini in maniera ragguardevole le questioni di filosofia e sai apprezzare nel suo giusto valore la ricerca matematica sui problemi nuovi che si presentano, ho giudicato opportuno di descrivere e di sviluppare in questo stesso libro le proprietà caratteristiche di un metodo che ti permetterà di affrontare certe questioni matematiche con l'aiuto della meccanica. Ma io sono persuaso che questo strumento può servire anche per la dimostrazione dei teoremi; certe proprietà in effetti, che mi erano apparse evidenti da un punto di vista meccanico, sono state poi dimostrate geometricamente, dato che, con questo metodo, non è possibile dare una dimostrazione rigorosa. E' più facile costruire una dimostrazione conoscendo preliminarmente le proprietà che si vuole dimostrare e che si sono conosciute con questo metodo piuttosto che cercare delle dimostrazioni senza nessun riferimento. Con questa testimonianza diretta di Archimede e dall'esame dei “teoremi meccanici” si dipana il mistero di Archimede, essendosi trovata la via segreta per la ricerca dei suoi notevoli risultati. I matematici di tutti i tempi sono sempre rimasti ammirati dal rigore delle dimostrazioni di Archimede, che riusciva ad utilizzare in modo mirabile il cosiddetto “metodo di esaustione”; metodo che, molto probabilmente, era stato introdotto da Eudosso di Cnido per evitare l'uso dei cosiddetti “indivisibili”, i quali, ancora ai tempi di Archimede, erano giudicati inutilizzabili in Matematica a causa forse dei “paradossi di Zenone”. Nulla sappiamo di Eudosso circa la sua concezione degli indivisibili; vero è che il metodo di esaustione evita il loro uso. Gli indivisibili però, espulsi, grazie ad Aristotele, dalla Fisica e dalla Geometria, hanno assunto nel tempo un considerevole valore euristico nella ricerca matematica e fisica, come si è potuto verificare nei secoli successivi. Archimede, quindi, non è solo un grande matematico o un grande fisico, ma è anche un grande filosofo che ha una concezione organica dell'universo e il metodo, che il matematico di Siracusa considera poco rigoroso, prefigura la teoria dell'integrazione definita e, in ultima analisi la teoria della misura. (Boscarino G.- MATEpristem-Unibocconi)

6. Luca Valerio, il novello Archimede

Nato a Napoli da padre ferrarese, fu allievo dell'editore veneto delle opere archimedee, Federico Commandini. Insegna al Collegio Romano dei Gesuiti. Nel 1610 è membro dell'Accademia dei Lincei, ma ne viene espulso nel 1616 per aver criticato l'appoggio dato dall'Accademia alla teoria galileiana del moto terrestre. Le sue opere "De centro gravitatis solidorum libri tres (1604)" e "Quadratura parabolae per simplex falsum (1606) gli valgono, da parte di Galileo, l'appellativo di "novello Archimede". Luca Valerio "algebrizza" il metodo di esaustione, generalizzandolo. Difatti, alla doppia riduzione all'assurdo, egli sostituisce il teorema seguente al quale fa riferimento: **TEOREMA:** Sezionando, con piani paralleli alla base del cilindro, il cono e la scodella si ottengono sezioni corrispondenti con la stessa area (sezioni equivalenti), intendendo per scodella la parte del cilindro che resta quando si toglie la semisfera. Dalla validità di questo teorema Luca Valerio deduce che la scodella ed il cono hanno lo stesso volume e che quindi il volume della semisfera si può ottenere dalla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono, cioè:

$$\pi r^2 * r - \frac{1}{3} \pi r^2 * r = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$$

dove $\frac{2}{3} \pi r^3$ è il volume della semisfera. La dimostrazione di Luca Valerio è resa rigorosa con un ragionamento per esaustione. Dietro il procedimento però c'è un'affermazione di carattere intuitivo e cioè che due solidi che risultano dalla somma di infinite aree equivalenti di spessore "infinitesimo" occupano lo stesso volume. A queste aree di spessore infinitesimo si darà poi il nome di indivisibili. Anche Galileo si occupa di questioni infinitesimali soprattutto nei suoi problemi cinematici, statici e dinamici. Infatti, nel corso della prima giornata dei "Discorsi", introduce anche gli indivisibili ma non mette a punto alcun metodo pratico per la loro manipolazione; la teoria è rimasta puramente speculativa sia in fisica che in geometria.

7. Bonaventura Cavalieri

Si conosce molto poco sui primi anni di vita di Cavalieri. Anche la data di nascita lascia adito a molti dubbi, benchè un suo allievo (Urbano D'Aviso o Daviso) dica: "Nacque il P. Bonaventura Cavalieri l'anno 1598 nella nobilissima città di Milano di honorati parenti". Il 20 settembre 1615, dopo due anni di noviziato, prende gli Ordini (e forse il nome di Bonaventura) di Gesuato di S. Gerolamo e viene inviato al monastero di S. Gerolamo a Pisa (verso la metà del 1616). Nel 1617 Cavalieri cerca di ottenere la cattedra di Bologna, molto ambita, ma non ci riesce (forse anche perché non ha l'appoggio di Galilei), cattedra che ottenne, invece, nel 1629. Muore nel 1647. Molti furono i matematici dell'epoca che osteggiarono il metodo degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri

di cui ci parla nella sua opera maggiore. “Geometria Indivisibilibus continuorum nova quodam ratione”, i cui primi sei libri furono composti già nel 1627, ma pubblicati solo nel 1635 perché negli anni 1632-35 ne scrisse altri due: il 7° e l’8° che trattano le possibili obiezioni al suo metodo: obiezioni che già allora prevedeva. Fra coloro che osteggiarono il suo metodo ricordiamo fra gli altri i Padri Gesuiti Guldino (1577- 1643), Tacquet e Bettini. Per rispondere alle obiezioni mossegli, Cavalieri scriverà negli anni 1643-1647 le “Exercitationes Geometriae Sex”. L’idea base della teoria degli indivisibili consiste nel paragonare due continui, paragonando i loro indivisibili. Quali sono questi indivisibili cavalieriani ? Sono tutte le linee in cui si può scomporre una figura piana; tutte le superfici, per un solido (diverso da Leibniz: rettangoli infinitesimi). Il principio di Cavalieri: “Figurae planae quaecumq; in eisdem parallelis constitutae in quibus, ductis quibuscumq; eisdem parallelibus aequidistantibus rectis lineis, conceptae cuiuscumq; rectae lineaeportiones sint inter se, ut cuiuslibet alterius in eisdem figuris conceptae portiones (homologis tamen in eadem figura semper existentibus)eandem inter se proportionem habebunt, quam dictae portiones” (Geometria, libro II. Propositio II). Se due aree piane tagliate da un sistema di rette parallele, intercettano, sopra ognuna di queste, due corde uguali, le aree sono uguali; se le corde corrispondenti hanno un rapporto costante, lo stesso rapporto passa fra le aree. Il processo del pensiero di Cavalieri è un processo di tipo analitico e non sintetico. L’impiego degli indivisibili al posto degli infinitamente piccoli è destinato, dal punto di vista di Cavalieri, a liberarci dal passaggio al limite, con le sue difficoltà, o più esattamente, le sue impossibilità logiche. E’ inoltre ben più economico del lungo giro delle dimostrazioni archimedee. Quasi due millenni dopo Archimede, il metodo di esaustione viene sostituito dal “metodo degli indivisibili” per opera soprattutto di Keplero, Cavalieri, Torricelli. Tale metodo è certamente più agile e veloce, ma molto meno rigoroso. Questo nuovo metodo non usa più, se non raramente, la dimostrazione per assurdo, ma si serve della più lineare dimostrazione diretta. La proposizione fondamentale del metodo degli indivisibili è il “principio di Cavalieri”, secondo il quale se due solidi hanno la stessa altezza e se la sezioni tagliate da piani paralleli alle basi ed equidistanti da esse stanno in un fissato rapporto, allora anche i volumi di tali solidi stanno nello stesso rapporto. Questa proposizione che egli riesce ad estendere a delle potenze superiori a due, così facendo andando oltre l’ambito della geometria propriamente detta, ha anche validità generale che è, come detto da Zeuthen (1903), l’equivalente esatto della formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^a x^2 dx = 1/3 a^3 \quad (\int_0^a x^n dx = 1/n + 1 a^{n+1})$$

Si le calcul infinitésimal représente la maturité, alors les indivisibles sont les découvertes del’ adolescence. (Barbin. 1987) (Se il calcolo infinitesimale rappresenta la maturità, allora gli indivisibili sono le scoperte dell’adolescenza). L’integrale definito, che noi oggi scriviamo: $\int_a^b f(x)dx$, venne indicato a lungo

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaustione all'integrale definito

con un simbolo cavalieriano: *omn.L.* abbreviazione di “omnes lineae. Solo con Leibniz, nato a Leipzig (Lipsia) nel 1646, abbiamo la notazione moderna. Il grande filosofo e matematico tedesco la sostituisce in modo esplicito alla notazione di Cavalieri. Da notare che si può stabilire una corrispondenza tra le denominazioni cavalieriane e le notazioni integrali.

8. Alle origine del calcolo sublime: Newton e Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz

Figlio di un professore universitario, Leibniz nacque a Leipzig (Lipsia) nel 1646, meno di quattro anni dopo Newton. Iniziò a studiare latino a otto anni e a 12 era già in grado di comporre buoni versi in questa lingua. Poi passò al greco e alle lingue moderne. Stancatosi degli studi classici, si volse verso la logica. I suoi tentativi, a soli 15 anni, di riformare la logica classica svilupparono i primi germi di quella che sarà la sua opera più importante, la “*Characteristica Universalis*”. (Mendelson, E., 1964) Si appassionò delle opere dei filosofi naturali del suo tempo, Keplero, Galileo, e Descartes. Nel 1666, nel saggio “*De arte combinatoria*” dichiarò di voler “creare un metodo generale nel quale tutte le verità della ragione fossero ridotte ad una specie di calcolo. Nello stesso tempo, questo sarebbe una specie di linguaggio o di scrittura universale, ma infinitamente diversa da tutto ciò che è stato proposto fino ad ora, poiché i simboli, come anche le parole, guiderebbero la ragione; e gli errori, salvo quelli di fatto, sarebbero puramente degli errori di calcolo.” Era l’anticipazione della logica simbolica di Boole. A 26 anni, a Parigi, cominciò la sua vera educazione matematica sotto la guida di Christian Huygens, (1629-1695), noto soprattutto per la teoria ondulatoria delle luce, che lo introdusse allo studio delle opere di Cavalieri, Roberval, Pascal, Descartes, Gregory e Wallis. Nel 1673, presentò alcune sue scoperte alla Royal Society, scoperte che gli consentirono di essere eletto membro straniero della società. Spinto da Huygens, Leibniz consacrò alla matematica tutto il proprio tempo libero, riuscendo a trovare alcune formule elementari del calcolo differenziale e scoprendone il “teorema fondamentale”. Troppo preso dalla politica per avere il tempo di scrivere lunghi trattati di matematica, Leibniz pubblicò il suo calcolo differenziale in una serie di brevi articoli apparsi a partire dal 1684 sugli “*Acta Eruditorum*”, giornale scientifico fondato con il suo appoggio a Lipsia. Nel 1684 pubblicò la prima esposizione del suo calcolo differenziale dal titolo: “*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*” (*Acta Eruditorum*, Mens, Octobr. 1684, pp. 467-473 e tab. XII).““Un nuovo metodo per la determinazione dei massimi e dei minimi, nonché delle tangenti, che non è ostacolato né dalle

quantità fratte, né dalle irrazionali, e un particolare sistema di calcolo per quelli (cioè per massimi, minimi, tangenti)". Nella "Nova Methodus", Leibniz non parla esplicitamente di funzioni ma solo di curve. Siamo, pertanto, ancora in ambito prettamente geometrico. Il termine "funzione" verrà da lui usato in una pubblicazione, per la prima volta, solo nel 1692. Esaminando gli scritti di calcolo infinitesimale di Leibniz e dei suoi allievi e continuatori ci si accorge che ciò che costituisce la forza del metodo leibniziano è la semplicità del suo algoritmo, la sua notazione elegante, il suo formalismo operativo che permette di effettuare quasi automaticamente i calcoli, mascherando la natura degli oggetti in gioco. Come Newton, Leibniz è tentato di non considerare gli elementi infinitesimali, bensì i loro rapporti. Il calcolo dei differenziali è dunque l'operazione fondamentale del calcolo Leibniziano. L'importanza del "nuovo metodo" viene ribadita da Leibniz nel passo che segue: "In tutti questi casi e in altri assai più complicati la facilità del nostro metodo è molto maggiore di quanto generalmente si creda e veramente straordinaria. E questi, invero, sono soltanto gli inizi di una certa Geometria, molto più sublime (di quella comune). che si estende ai problemi più difficili e più belli, anche della Matematica mista". Leibniz era consapevole, fin dall'inizio, del carattere rivoluzionario della sua scoperta.

Isaac Newton

Isaac Newton nacque il giorno di Natale del 1642 a Woolsthorp nella contea di Lincoln, in Inghilterra. Orfano di padre, la madre si risposò con il reverendo di una vicina parrocchia ed egli fu allevato dalla nonna. Frequentò prima la scuola del villaggio, poi il collegio di Grantham e, nel giugno 1661, entrò "alla pari" nel Trinity College di Cambridge dove segue le lezioni tenute da Barrow che lo invita a leggere i classici greci (Euclide ed Archimede). In questi anni studia anche, fra le altre, le opere di Viete e la "Géométrie" di Descartes nell'edizione latina curata da Van Schooten. L'opera dalla quale viene forse maggiormente influenzato è "l'Arithmetica infinitorum" di Wallis. Nel 1666 Londra e i dintorni sono colpiti dalla peste, per cui Newton lascia Cambridge e si ritira in campagna. Il biennio 1666-1667 è il più fecondo di risultati, sia per la fisica, che per la matematica. Risale infatti a quest'epoca l'intuizione della legge di gravitazione universale, la formula del binomio, l'elaborazione del metodo delle flussioni e la teoria sulla natura dei colori. Nel 1669 ottenne la cattedra di Matematica che prima aveva Barrow. I più importanti lavori matematici li fa prima della crisi depressiva del 1692, ma verranno pubblicati solo molto dopo, in occasione della disputa con Leibniz per la priorità della scoperta del calcolo infinitesimale. Muore nel 1727.

La sue opere principali sono:

- Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687) – fondamento della Meccanica classica;

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaustione all'integrale definito

- Tractatus De Quadratura curvarum (appendice all'Optiks), 1704, ma scritta nel 1676;
- De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas, 1711, ma del 1669;
- Methodus fluxionum et serierum infinitarum, 1736, ma del 1671.

Tutte le sue opere, ad eccezione dei "Principia", rivelano un indirizzo di tipo empirista e pragmatico; la matematica ha un valore essenzialmente strumentale nei confronti della fisica.

9. Fluenti e flussioni

Newton fonda la sua analisi della cinematica sul concetto di flussione: sia x una grandezza matematica generata dal movimento di un altro ente. Newton chiama x fluente; la flussione è invece indicata con \dot{x} ed è definita come la velocità di accrescimento di x . Nel "Tractatus de quadratura curvarum" (1704) scrive: "Considero in questo lavoro le grandezze matematiche come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte per moto continuo di punti, le superfici per moto di linee, chiamando flussioni queste velocità di accrescimento e fluenti le quantità generate" (Giusti, E., Politecn. Torino, Vol, 46,I- 1988). Per Newton la flussione è una velocità di accrescimento. Bisogna però tener presente che egli non la definisce come limite del rapporto incrementale: in tutte le sue opere non c'è, neanche a parole, il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

Occorre dunque precisare tre punti:

1. Newton considera solo grandezze dipendenti dal tempo; un tempo che possiamo pensare convenzionale. Egli dice nel "Methodus fluxionum": "...questa parola tempo si deve assumere non come se io avessi voluto considerare il tempo nel suo significato letterale, ma per indicare quelle quantità diverse dal tempo, mediante il cui aumento o flusso uniforme, si rappresenta o si misura il tempo."

Per noi, ad esempio, $y = x^3$ è una relazione fra due variabili: x indipendente e y funzione di x . Per Newton, invece, x è una fluente, funzione del tempo e y è ancora una fluente, funzione del tempo. \dot{x} è la flussione, la velocità di accrescimento, secondo le parole di Newton; anche se egli non definisce la velocità istantanea, tuttavia la concepisce come quantità fisica.

2. Newton non calcola mai delle flussioni, ma solo rapporti fra flussioni, come ad esempio \dot{x}/\dot{y} \dot{y}/\dot{x} . Come Barrow parte da relazioni del tipo

$F(x, y) = 0$ e con regole ben precise passa alla relazione fra flussioni \dot{x} e \dot{y} . Ad esempio, di fronte a $x^3 - xy^2 - a^3 = 0$ noi consideriamo x

e y come funzioni del tempo e deriviamo rispetto al tempo: $3x^2 \dot{x} - \dot{x} y^2 - 2xy \dot{y} = 0$, dove

$$\dot{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad e \quad \dot{y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

Newton giunge alla stessa relazione fra \dot{x} e \dot{y} , ma queste non sono per lui, su un piano teorico, delle derivate come le intendiamo noi, anche se operativamente coincidono. In generale Newton calcola i rapporti \dot{y}/\dot{x}

ma talvolta pone $\dot{x} = 1$, per cui $\dot{y}/\dot{x} = \dot{y}$ ciò operativamente è vicino

al nostro $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$.

3. Va rilevato, infine, che nei Principia, Newton non usa esplicitamente il calcolo ma “maschera” tutto sotto uno stile euclideo.

10. Sviluppi in serie

I risultati ottenuti da Newton sugli sviluppi in serie si trovano in manoscritti risalenti al 1665 ed anche in opere pubblicate, ad esempio nel “De Analysi” e si possono considerare come derivati da studi sulle opere di Wallis, in particolare sulla “Arithmetica infinitorum” (1656). Il più famoso di questi risultati è quello passato alla storia come “il binomio di Newton”:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad n \in N \quad (1)$$

In realtà va detto che Newton trovò anche la formula:

$$(1 + x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n, \quad \text{con } r > 0, r < 0, r \in N, r \in Q, \text{ ma non } r \in R \quad (2)$$

Se vogliamo chiamare la 2) serie di Newton, riconoscendogli il merito do aver esteso la 1) al caso 2), dobbiamo precisare che Newton:

- ha operato questa generalizzazione, ma non per $r \in R$,
- ha trovato questa estensione non con il calcolo di derivate, ma con svariati metodi (per esempio divisione, estrazione di radice, ecc...):
- non si poneva il problema della convergenza o meno della serie.

Le serie, per Newton, non potevano non convergere. Difatti afferma esplicitamente: “Se nella pratica un problema reale conduce ad una serie che non converge, ciò può dipendere soltanto dal fatto che il problema è stato mal impostato: si cerchi di rielaborarlo meglio, restando più aderenti alla realtà fisica e la serie trovata cesserà di essere divergente.” Gli sviluppi in serie sono per Newton la chiave per affrontare e risolvere nella loro massima generalità i principali problemi del calcolo. Le vivaci controversie tra Newton e Leibniz

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaurimento all'integrale definito

sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale favorirono la nascita di due scuole di pensiero: quella inglese e quella continentale. La scuola inglese tenta con tenacia di chiarire le nozioni che servono da base al metodo delle flussioni e di eliminarne le difficoltà filosofiche inconciliabili con l'intuizione geometrica alla quale gli analisti inglesi danno la preminenza. Gli interventi in questo senso sono talvolta molto duri e polemici, come, in particolare, quello di Berkeley che, nel 1734 (mentre è vescovo a Cleyne), pubblica un'opera nella quale tenta di dimostrare che il calcolo newtoniano conduce a verità solo grazie a una compensazione di errori: chi crede in tale calcolo è quindi un miscredente.

Componenti di spicco della scuola inglese furono:

- George Berkeley (1684-1753)
- Colin Mac Laurin (1698- 1746), allievo di Newton. Scrisse il trattato "Treatise of Fluxions" nel quale compare la formula dello sviluppo in serie di una funzione
- Brook Taylor (1685- 1731).

La scuola continentale, capeggiata dai Bernoulli e dai Bernoulliani, si caratterizza piuttosto per una tendenza a legare il calcolo differenziale all'idea di funzione che con Eulero (1707-1783) diventa un concetto fondamentale in matematica. La compattezza delle nozioni leibniziane, l'efficacia dei suoi algoritmi favoriscono, sotto l'impulso del punto di vista formalista di Eulero, uno sviluppo quasi automatico del calcolo differenziale anche se i matematici fanno talvolta ancora appello alla filosofia per giustificare la nozione di infinitesimo. Il calcolo infinitesimale si diffonde rapidamente grazie in parte alla vasta corrispondenza di Leibniz con i suoi contemporanei, in particolare i Bernoulli. La matematizzazione progressiva della fisica, l'uso del calcolo infinitesimale nell'analisi dei fenomeni naturali sono all'origine del fiorire di nuove branche della matematica:

- Lo studio di fenomeni meccanici e fisici si traducono in generale in equazioni differenziali la cui integrazione sarà l'oggetto di un nuovo ambito dell'analisi;
- La matematizzazione della meccanica, dell'idrodinamica e della teoria dell'elasticità è l'impulso principale allo sviluppo del calcolo delle variazioni,
- Lo studio delle curve e delle superfici necessita di tecniche differenziali che sono all'origine della geometria differenziale.

Tutte queste branche si dipartono da un tronco comune: il calcolo infinitesimale ed il suo sviluppo costituirà l'oggetto delle ricerche matematiche del XVIII secolo. Il calcolo si amplia tramite il ramificarsi delle sue applicazioni, ma la difficoltà di definirne le nozioni fondamentali rimane. Quasi tutti i matematici di questo secolo provano a superare tali difficoltà. Ma i loro tentativi rimarranno vani. Agli inizi del XIX secolo, il desiderio di basare la

matematica su fondamenti solidi diventa quasi generale e la necessità di mettere in chiaro i concetti basilari dell'analisi si fa pressante. I matematici si interrogano sulla natura delle funzioni in generale e delle funzioni continue in particolare. Il logico e matematico di Praga Bernard Bolzano (1781- 1848) ha per primo una concezione chiara delle nozioni di base del calcolo infinitesimale (continuità, legame tra continuità e derivabilità) ma i suoi lavori passano inosservati per mezzo secolo.

11. Due grandi analisti: J.L. Lagrange e A.L. Cauchy

J.L. Lagrange

Il principale artefice dell'introduzione del rigore nel calcolo infinitesimale fu il matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789- 1857), nato a Parigi nel 1789, poco prima della presa della Bastiglia. Suo padre, giurista parlamentare, al momento della caduta della Bastiglia, dovette fuggire con tutta la sua famiglia e rifugiarsi ad Arcueil, suo paese di origine. Qui Cauchy incontrò Laplace, il quale si accorse della grande predisposizione del ragazzo per la matematica ma, vistolo così gracile, gli raccomandò di curarsi e di non affaticarsi troppo negli studi. La carriera di Cauchy fu rapidissima: passò al Politecnico, quindi alla scuola degli ingegneri civili ed ebbe un importante incarico a Cherbourg, dove Napoleone aveva ordinato la costruzione di impianti portuali e fortificazioni, al fine di una futura conquista dell'Inghilterra. Dopo la disfatta di Lipsia (1813) tale progetto venne meno e Cauchy tornò a Parigi, dove era diventato ormai famoso presso la comunità scientifica per una memoria sui determinanti. A Parigi, a soli 27 anni, venne scelto per un seggio all' Accademia delle Scienze e rimase in questa città, come direttore dell'Ecole Polytechnique, fino al 1830. Dopo la caduta di Carlo X, Cauchy, che aveva giurato fedeltà al re, decise di andare in esilio in Svizzera. Poco tempo dopo accettò la cattedra di fisica matematica a Torino, offertagli da Carlo Alberto, re di Sardegna. In seguito si trasferì a Praga, dove fu precettore del Duca di Borgogna, nipote di Carlo X. Tornato a Parigi nel 1838, dal 1848 ottenne nuovamente una cattedra alla Sorbona. Durante gli ultimi diciannove anni della sua vita compose più di 500 memorie concernenti tutti i rami della matematica, compresa la meccanica, la fisica e l'astronomia. Morì nel 1857. In tutta la sua vita Cauchy produsse un tal numero di opere e di memorie da risultare secondo soltanto a Eulero per la quantità della produzione scritta. Preferendo la matematica pura a quella applicata, curò in modo particolare l'eleganza della forma e il rigore dimostrativo. Era tra l'altro dotato di una grande capacità lavorativa e di una prodigiosa fecondità intellettuale.

La sue opere principali sono:

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaurimento all'integrale definito

- Cours d'analyse (1821);
- Résumé des Leçon sur le calcul infinitésimal (1823);
- Leçons sur le calcul différentiel (1829);

In tutte le sue opere appare determinante il concetto di limite. La sua definizione, che riprende l'idea di D'Alembert, rompe definitivamente con la concezione geometrica che era ancora soggiacente e fa del limite un concetto aritmetico: "Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres". (Quando i valori successivamente attribuiti ad una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fisso, in modo che ne differiscano poco quanto si vuole, quest'ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri). Alla luce dei concetti di limite, di variabilità e di funzione Cauchy chiarisce la nozione di infinitamente piccolo che non è altro che una successione convergente avente zero come limite. La derivata di una funzione continua $y = f(x)$ è definita anch'essa in termini di limiti: "E' il limite, quando esiste, del rapporto delle differenze (rapporto incrementale della funzione) $\frac{f(x+i)-f(i)}{i}$ quando i si avvicina al limite zero". Sappiamo che una funzione derivabile in un punto è ivi continua, ma che l'inverso non è vero. Il legame fra continuità e derivabilità, però, non verrà mai esplicitato nei lavori di Cauchy. Il problema non sarà chiaramente formulato se non a partire dalla memoria di Dirichlet sullo sviluppo delle funzioni trigonometriche. Dopo aver definito la derivata, infine, Cauchy stabilisce il suo legame con i differenziali di Leibniz: se dx è una quantità finita qualunque, il differenziale dy di una funzione $y = f(x)$ sarà semplicemente $f'(x) dx$. Le quantità dx e dy sono dunque definite mediante la sola proprietà di avere un rapporto uguale alla derivata prima $f'(x)$.

Joseph-Louis Lagrange

Lagrange nacque a Torino nel 1736 da una ricca famiglia con antenati italiani e francesi. A 16 anni, nel 1754, scrisse la prima opera, l'unica in italiano: una lettera "matematica" sulla determinazione dei coefficienti per lo sviluppo del binomio di Newton per potenza qualsiasi. Nel 1755 ottenne un posto come professore di matematica presso la Regia Scuola di Artiglieria di Torino e, due anni dopo, con Angelo Saluzzo di Monesiglio, chimico, e Giovanni Francesco Cigna, medico, fondò la Reale Accademia della Scienze di Torino. A trent'anni una sua memoria sui massimi e i minimi gli fece ottenere la nomina a membro della Accademia delle Scienze di Berlino. Nel 1766 Lagrange fu chiamato da Federico II di Prussia – che era stato consigliato da D'Alembert – a sostituire Eulero alla direzione della classe di Scienze matematiche della Accademia di Berlino. Restò in questa città per vent'anni, durante i quali pubblicò 63 memorie sui soggetti più disparati e iniziò a lavorare a un trattato di meccanica, che però

pubblicò dopo essersi trasferito a Parigi a seguito della morte di Federico II (1787), ove accettò la posizione di socio straniero presso l'Accademia delle Scienze della capitale francese. Qui pubblicò la sua opera più famosa, "Méchanique analytique", uno splendido trattato nel quale espone metodi di indagine matematica su problemi di meccanica che non richiedono costruzioni, né ragionamenti geometrici, ma solo operazioni algebriche. Durante la Rivoluzione francese collaborò alla riorganizzazione dell'insegnamento scientifico nella università e presiedette la commissione per l'introduzione del sistema metrico decimale. Lagrange era sempre pronto a eseguire i compiti scientifici e tecnici che gli venivano richiesti: calcolò traiettorie di artiglieria, lavorò, assieme a Lavoisier, a un modello matematico dell'economia francese, indagò sulle tecniche molitorie da adottare per i vari cereali e, soprattutto, partecipò ai lavori di tutte le Commissioni metriche che si succedettero dal 1790 al 1799. Fu membro dell'Institut National (l'antica Accademia) del Bureau des Longitudes, insegnante presso l'Ecole Normale e presso l'Ecole Polytechnique. Napoleone lo nominò senatore, Grand' Ufficiale della Legione d'Onore, conte dell'Impero e Gran Croce della Riunione. Alla sua morte (1813) fu sepolto nel Panthéon di Parigi. Lagrange fu uno dei maggiori matematici del Settecento e partecipò attivamente al movimento culturale dell'Illuminismo attraverso i molti vincoli che lo legarono ai più avanzati ambienti scientifici. Lasciò una produzione di vasta mole: compì ricerche di notevole importanza sul calcolo delle variazioni, sulla teoria delle funzioni e sulla sistemazione matematica della meccanica.

12. Una prima teoria dell'integrazione

Newton e Leibniz avevano elaborato due concezioni differenti di integrale. Quella di Newton aveva soprattutto fatto uso dell'integrale indefinito e considera l'integrazione come operazione inversa della differenziazione. Questo punto di vista aveva prevalso nel corso di tutto il XVIII secolo. Leibniz aveva interpretato le aree e i volumi come somme di rettangoli e di cilindri, ciò che aveva portato ad utilizzare l'integrale definito. Cauchy, che darà per primo una precisa definizione di integrale (1823), aderirà a questa seconda interpretazione. Difatti sottolinea la necessità di dimostrare l'esistenza degli integrali "prima di far conoscere le loro diverse proprietà". Il suo punto di partenza è una funzione reale, continua in un intervallo $[x_0, x]$, che viene suddiviso in n sotto-intervalli. Cauchy forma, poi, la somma:

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \dots \dots \dots (x_n - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

e dimostra che il limite di S , al tendere a zero della lunghezza del maggiore dei sotto-intervalli, esiste (la dimostrazione rigorosa esige la nozione di uniforme continuità, che Cauchy non possedeva). Utilizza la notazione $\int_{x_0}^x f(x) dx$, "imaginée par M. Fourier" e definisce $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, dove x

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaurimento all'integrale definito

appartiene all'intervallo $[x_0, x]$ e mostra che $F'(x) = f(x)$ per ogni x dell'intervallo $[x_0, x]$. Questa proposizione stabilisce il legame tra l'integrazione e la derivazione ed è dunque ancora in Cauchy che troviamo una prima dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo infinitesimale. Nel 1823, in una memoria sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, Cauchy scriveva: "In questa memoria consideriamo ogni integrale definito come la somma dei valori indefinitamente piccoli delle espressioni differenziali poste sotto \int , che corrispondono ai diversi valori della variabile compresi tra i limiti in questione. Se adottiamo questa maniera di considerare gli integrali definiti proviamo facilmente che ogni siffatto integrale ha un unico valore finito ogni volta che, essendo i due limiti della variabile finiti, l'integranda si mantiene finita e continua tra questi limiti". In un poscritto a quella memoria, egli scriveva: "Noi siamo naturalmente portati dalla teoria delle quadrature a considerare ogni integrale definito, preso tra due limiti reali, come la somma dei valori infinitesimi della espressione differenziale sotto il segno \int che corrispondono ai diversi valori reali della variabile che sono compresi tra i limiti in questione. Ora a me sembra che questo modo di considerare un integrale definito debba essere preferibilmente adottatoperchè è ugualmente adatto, in ogni caso, anche a quelli in cui non possiamo generalmente passare dalla funzione sotto il segno \int alla funzione primitiva....." Con Cauchy si ha il momento di svolta, dal considerare l'integrazione come operazione inversa della derivazione verso una moderna teoria della misura, dove l'oggetto primario di interesse è l'integrale. Rendendo rigorosa l'originaria concezione di Leibniz dell'integrale come somma di elementi infinitesimi, Cauchy si allontana in modo netto dalla pratica allora usuale di assumere in primo luogo l'esistenza dell'integrale indefinito e, da questo, far discendere l'integrale definito secondo la formula classica:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{dove } F'(x) = f(x)$$

Egli dice "è sembrato necessario dimostrare generalmente l'esistenza degli integrali o funzioni primitive prima di far conoscere le loro diverse proprietà. A questo scopo si è reso indispensabile anzitutto stabilire la nozione di integrale preso entro limiti dati o integrale definito". Nella trattazione dell'integrazione Cauchy non si limita a considerare l'integrale come l'inverso della derivata, ma al contrario lo definisce in maniera indipendente, salvo poi confrontare tra loro le due operazioni. Con l'introduzione di questo nuovo punto di vista, il teorema fondamentale del calcolo integrale, che nella teoria di Leibniz e Newton serviva essenzialmente per la definizione di integrale, assume ora il ruolo di un vero teorema, in quanto asserisce che le due operazioni di integrazione e derivazione, definite indipendentemente, sono (a meno di costanti additive) l'una l'inversa dell'altra. Un serio inconveniente alla definizione di

integrale di Cauchy è che esso vale solo per le funzioni continue, una limitazione particolarmente grave per la trattazione delle serie di Fourier. E' proprio questa la ragione che spinge Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) a definire l'integrale per arbitrarie funzioni limitate. Col tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) la ricerca del rigore intrapresa da Cauchy si spinge ancora più lontano. Per chiarire i metodi dell'analisi, Weierstrass preconizza l'introduzione di un formalismo aritmetico, di cui, peraltro, mancano ancora i fondamenti logici. E' Weierstrass stesso che cerca la via per porre rimedio a tale carenza. La sua costruzione dei numeri reali che si situa intorno al 1863 non resta isolata. L'anno 1872 vede la pubblicazione dei risultati in questo campo di Georg Cantor (1845-1918), di Eduard Heine (1821- 1881) e di Richard Dedekind (1831- 1916). Fra i contributi di Weierstrass al programma di aritmetizzazione dell'analisi, oltre al linguaggio e al simbolismo non equivoci, si contano tra l'altro una definizione soddisfacente del concetto di numero reale e un perfezionamento della definizione del concetto di limite di una funzione ripresa da Heine, nei suoi *Elemente* del 1872, che risentono dell'influenza delle lezioni di Weierstrass. Arriva in tal modo alla definizione in termini di epsilon-delta della variazione infinitamente piccola della variabile e della funzione. Ne derivano immediatamente le definizioni moderne di limite e di continuità.

13. L'analisi non standard

La matematica del seicento venne caratterizzata fondamentalmente dalla ricerca della soluzione ad un celebre e antico problema: il cosiddetto "*problema delle tangenti*". Esso consiste nella determinazione della retta tangente al grafico di una data funzione reale di variabile reale in ogni suo punto. A questo si aggiunse in modo naturale l'esigenza della risoluzione del problema inverso: data una relazione fra la tangente ed il punto risalire al grafico della funzione, per risolvere il quale si fece ricorso al metodo infinitesimale di Newton e Leibniz aspramente criticato nel 1734, dal vescovo George Berkeley il quale sosteneva, a ragione, la contraddittorietà della nozione di infinitesimo. Quando nel XIX secolo si presentò una forte esigenza di rigore matematico, il calcolo differenziale venne completamente riformulato da Karl Weierstrass, tra il 1870 ed il 1880, introducendo il concetto di limite, il quale permise di operare in termini dei soli numeri reali eliminando una volta per tutte l'uso degli infinitesimi. L'approccio di Weierstrass è quello "standard" ormai consolidato che viene insegnato oggi nei corsi di Analisi. Tuttavia, pur essendo un metodo rigoroso, ha il difetto di farci perdere l'intuizione iniziale che aveva dato il via alla nascita del calcolo infinitesimale e che comunque ci aveva condotto a delle conclusioni corrette. E se i risultati sono corretti, non potrà esserlo in qualche modo anche il procedimento? La risposta a questa domanda è sì. Nel 1961 il matematico americano di origine tedesca Abraham Robinson trovò un modo per

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaurimento all'integrale definito

rendere rigoroso il calcolo differenziale usando gli infinitesimi. Questa sua scoperta si fonda in modo essenziale sulla logica matematica, anche se verso la fine degli anni sessanta il matematico americano H. Jerome Keisler è riuscito a riformulare tutta l'Analisi Matematica secondo il principio infinitesimale di Robinson, seguendo una via alternativa che non la utilizza. Robinson battezzò questo "nuovo" calcolo differenziale *Analisi Non-Standard*, in quanto esso si basa appunto su un modello non-standard dei numeri reali. Prendiamo come punto di partenza il sistema dei numeri reali \mathbb{R} che chiameremo *universo standard* ed il calcolo differenziale di Weierstrass (o *Analisi Standard*). L'analisi non-standard si fonda sul sistema dei numeri iperreali. I numeri iperreali, come aveva vagamente supposto Leibniz, godono delle stesse proprietà formali dei numeri reali. L'esistenza di "strani" numeri non contemplati dall'aritmetica usuale fu scoperta per la prima volta nel 1934 dal logico norvegese Thoralf A. Skolem che costruì un modello non-standard dei numeri naturali. Successivamente questa costruzione fu ampliata fino ad arrivare al campo dei numeri iperreali. Il termine "iperreale" è dovuto ad Edwin Hewitt in un articolo del 1948. La geniale intuizione di Robinson fu quella di utilizzare gli infinitesimi per riformulare l'Analisi Matematica. Ripercorriamo questa ricostruzione partendo dal Teorema di completezza di Godel: *"Un insieme di proposizioni è logicamente coerente (nessuna contraddizione può essere dedotta da esso) se e solo se esso ha un modello, cioè se e solo se esiste un universo in cui esse sono tutte vere.* Accanto al Teorema di completezza abbiamo l'importante corollario dovuto a Malcev Henkin: Teorema di compattezza: *Sia P un insieme di proposizioni di un linguaggio formale L . Supponiamo che nell'universo standard ogni sottoinsieme finito di P sia vero. Allora esiste un universo non-standard in cui tutte le proposizioni di P sono contemporaneamente vere.* Il teorema di compattezza è una diretta conseguenza del teorema di completezza. Grazie a questi due teoremi è possibile dimostrare l'esistenza degli infinitesimi. Eppure l'avvento dell'Analisi Non-Standard ha trovato sorprendentemente una reazione negativa da parte soprattutto degli analisti, fedeli al metodo tradizionale di Weierstrass. L'Analisi Non-Standard sta però prendendo piede in settori come la probabilità e la geometria differenziale, date le notevoli semplificazioni che porta. La ricerca in questa direzione va perciò oltre la semplice trattazione che abbiamo dato noi e che è a tutt'oggi ad un livello veramente avanzato. Lo stesso Robinson, insieme al suo allievo Allen Bernstein, ha risolto tramite l'Analisi Non-Standard un problema precedentemente insoluto sugli operatori lineari compatti. Concludiamo queste brevi note citando una frase di Abraham Robinson che è tratta dal suo libro *Non-Standard Analysis* e che solo l'umiltà di una mente geniale come la sua poteva dettare: *"Il fatto che questo libro contenga solo applicazioni alla Matematica Applicata classica è probabilmente una testimonianza delle limitazioni dell'autore e non del metodo."*

Conclusioni

L'analisi non standard, quindi, introdotta nei primi anni '60 da Abraham Robinson, rappresenta una rifondazione dell'analisi matematica che recupera in buona parte l'impostazione originale di Leibniz e il concetto di infinitesimo. Il calcolo infinitesimale creato da Leibniz nel XVII secolo si fondava in modo essenziale sul concetto di infinitesimo grazie al quale è possibile introdurre i concetti di derivata e di integrale e dedurre le regole di derivazione e di integrazione. Il concetto di infinitesimo nascondeva però una contraddizione logica che fu messa in luce da George Berkeley ed anche da Karl Marx nei suoi scritti matematici: gli infinitesimi sono a volte considerati diversi da zero, a volte uguali a zero. Per superare questo problema, nel XIX secolo Augustin Cauchy e Karl Weierstrass rifondarono il calcolo infinitesimale, abolendo gli infinitesimi e fondando il tutto invece sul concetto di limite: in questo modo le contraddizioni logiche insite nel concetto di infinitesimo furono superate, al prezzo di una notevole complicazione di definizioni e dimostrazioni. Aboliti gli infinitesimi, il calcolo infinitesimale si trasformava nella moderna analisi matematica. Nel XX secolo Abraham Robinson, un logico matematico tedesco emigrato negli USA, nel corso dei suoi studi di logica, scoprì che tutti gli insiemi numerici potevano essere estesi con numeri "non standard" che ne ereditavano le proprietà. Per l'insieme dei numeri reali questi altro non erano che gli infinitesimi di Leibniz, definiti questa volta in modo assolutamente rigoroso: diventava così possibile fondare nuovamente l'analisi sul concetto di infinitesimo, e Robinson lo fece nel suo libro *Non-standard Analysis* (1966). E "analisi non standard" è il nome dato a questa nuova formulazione dell'analisi. Definizioni e dimostrazioni ritrovano la semplicità e la linearità del calcolo di Leibniz. Nel 1973 Kurt Gödel, forse il più famoso matematico del XX secolo, disse: "Ci sono buoni motivi per credere che l'analisi non standard in una versione o in un'altra sarà l'analisi del futuro", previsione ancora lontana dall'essere realizzata. Dopo Robinson vi è stata una fioritura di studi e di tentativi di riformulare l'analisi sul concetto di infinitesimo, come nel caso della *Smooth Infinitesimal Analysis* (SIA). Siamo, però, convinti che ogni ricerca sugli assiomi fondamentali della Matematica, come pure delle diverse scienze sperimentali, umanistiche, filosofiche comporta, fra l'altro, il superamento di una visione troppo chiusa delle diverse specializzazioni ed un'idea più ampia del rigore matematico o scientifico. Il rigore matematico non è solo accuratezza nelle dimostrazioni ma anche impegno a esporre nel modo più chiaro e comprensibile i problemi che si vorrebbero risolvere, i teoremi che si vorrebbero dimostrare, le congetture che si vorrebbero verificare o confutare. Noi riteniamo che il rigore scientifico consista soprattutto nell'esporre chiaramente e liberamente le proprie certezze e i propri dubbi, i problemi che si ritiene di aver risolto e quelli che si vorrebbero risolvere o vedere risolti, evitando sempre quei

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaustione all'integrale definito

discorsi confusi, oscuri, inutilmente complicati che finiscono con l'annoiare anche l'ascoltatore meglio disposto. Ogni discorso sul metodo scientifico, sul rigore scientifico e sul significato della Scienza ci riporta, in ultima analisi, alle più antiche intuizioni sui valori sapienziali dell'umiltà, della "convivialità" (che è condivisione del sapere, amicizia, ricerca di reciproca comprensione) e della fiducia nella Sapienza che viene incontro a coloro che la amano e la cercano.

Bibliografia

- [1] Davis, M., Hersh, R., *L'Analisi Non-Standard, Le Scienze quaderni*, 60, 1991, pp. 52-59 (numero speciale a cura di C. Mangione).
- [2] Hurd, A. E., Loeb, P. A., *An introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, Orlando, 1985.
- [3] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1964 (tr. it. di T. Pallucchini, *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1972).
- [4] Robinson, A.- *Non-Standard Analysis*- North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [6] Boyer, C.B.- *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1980
- [7] Giusti, E., *il calcolo infinitesimale tra Leibniz e Newton*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn., Torino, Vol, 46,I- 1988
- [8] Cfr. G. Galilei, *Opere*, Utet, Torino, 1964, Vol. II, p. 613. [9] Archimede, *Opere*, Utet, 1974, p. 572. (9) Cfr. C.B. Boyer, *The Concepts of the Calculus*, N. York, 1939, p. 48.
- [10] Lucio Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*, Editori Riuniti Univ, Press- Gennaio 2015

Sitografia

www.leonardo-ambrosiana.it
www.matematica.unibocconi.it

Quesiti e test di Probabilità e Statistica: un'analisi critica

Fabrizio Maturo

Dipartimento di Economia Aziendale
Università di Chieti-Pescara
f.maturo@unich.it

Sunto

Nei corsi di Probabilità e Statistica, un metodo molto diffuso per la valutazione degli studenti consiste nel sottoporli a quiz a risposta multipla. L'uso di questi test permette di valutare alcuni tipi di abilità come la rapidità di risposta, la memoria a breve termine, la lucidità mentale e l'attitudine a gareggiare. A nostro parere, la verifica attraverso i test può essere sicuramente utile per l'analisi di alcuni aspetti e per velocizzare il percorso di valutazione ma si deve essere consapevoli dei limiti di una tale procedura standardizzata e quindi escludere che le valutazioni di alunni, classi e scuole possano essere ridotte a elaborazioni di risultati di test. A dimostrazione di questa tesi, questo articolo argomenta in dettaglio i limiti principali dei test, presenta alcuni recenti modelli proposti in letteratura e propone alcuni metodi di valutazione alternativi.

Parole Chiave: item response theory, valutazione, test, probabilità

1. Introduzione

Nei test per la valutazione dell'apprendimento della Probabilità e della Statistica, un possibile metodo di valutazione consiste nel sottoporre gli studenti a quiz a risposta multipla. Se ad esempio le possibili risposte sono quattro, si può pensare che, una risposta sia quella esatta, una sia quella del tutto sbagliata, le altre due possano sembrare esatte a un individuo poco attento, o poco preparato, o poco abile, e determinano, dunque, la *selettività* del quesito.

L'uso dei test permette di valutare alcuni tipi di abilità come ad esempio:

- rapidità di risposta,
- memoria a breve termine,
- lucidità mentale,
- attitudine a gareggiare.

Tuttavia vi sono molte controindicazioni che, a nostro parere, ne consigliano un uso limitato.

Infatti usando i test invece di un colloquio, può capitare che:

- sia impedita una analisi approfondita del problema,
- siano sacrificate le intelligenze analitiche,
- sia appiattita la fantasia e la libertà di espressione,
- siano considerate come errore delle idee e delle soluzioni originali,
- la velocità è contro la risposta ragionata e brillante.

Vi sono ragazzi che, animati da spirito sportivo, si possono divertire a gareggiare con un test, ma altri ragazzi, timidi, insicuri, riflessivi e non rapidi nelle decisioni, possono essere sacrificati, pur avendo le capacità per emergere brillantemente a lungo termine.

Forse un punto su cui riflettere è proprio decidere se la scuola deve *formare, informare o far gareggiare*.

E se la scuola deve insegnare a gareggiare, gli studenti devono: *doparsi imparando a risolvere, con una prestazione immediata, batterie di quiz?* oppure *devono seguire un accurato percorso formativo per poter vincere da adulti senza doping?*

Riteniamo che la verifica attraverso i test può essere utile per l'analisi di alcuni aspetti, ma si deve essere consapevoli dei limiti di una tale procedura automatica e quindi escludere che le valutazioni di alunni, classi e scuole possano essere ridotte a elaborazioni di risultati di test.

Gli automatismi provocano una eccessiva semplificazione delle relazioni scolastiche, eliminando il contributo del complesso rapporto umano studente-docente e astraendo dalla complessità dell'essere umano che impara e agisce soprattutto per emozioni e non per automatismo logico.

Forse i migliori risultati ottenuti nei test INVALSI nel nord rispetto al sud dipendono dalla maggiore carica emotiva presente nelle popolazioni del sud che porta a rifiutare una valutazione arida e impersonale e a desiderare relazioni più umane e calorose in ambito scolastico.

Non bisogna inoltre trascurare l'impatto che l'uso predominante dei test può avere sul lavoro degli insegnanti. I test limitano la libertà di insegnamento, facendo sostituire in gran parte alla programmazione didattica dell'insegnante un itinerario alternativo di preparazione ai test. Ciò è un danno se la libertà di insegnamento è intesa, correttamente, come possibilità, per il docente, di trasmettere il suo entusiasmo, di mostrare i valori in cui crede e curare gli aspetti su cui ha maggiore competenza e maturità.

In seguito, partendo da quesiti apparentemente banali, mostriamo come si può impostare una accurata analisi che può anche far accettare soluzioni diverse da quella “corretta”.

Il dubbio, anche sulle cose apparentemente più scontate, è il motore che ha permesso le ricerche più rivoluzionarie. Perché non affermare la cultura del dubbio?

L'errore non è da rimproverare, ma deve far riflettere. Errare significa avere un modo di ragionare diverso dalla massa, punti di vista diversi e sono proprio i punti di vista originali che fanno crescere la scienza.

2. Analisi critica di quesiti di probabilità

Ovvero: cosa si può nascondere dietro quesiti apparentemente semplici con “risposte esatte” apparentemente “inequivocabili”.

2.1 *Il quesito del figlio maschio*

In una famiglia ci sono due figli. Sapendo che uno dei figli è femmina, qual è la probabilità che l'altro figlio sia maschio?

Soluzione ingenua: L'altro figlio può essere maschio o femmina con uguale probabilità, per cui la probabilità cercata è $1/2$.

Spunti di riflessione: Che vuol dire “uno dei figli è femmina?”, che è femmina *uno solo* dei figli o che è femmina *almeno uno* dei figli? Nel primo caso la probabilità cercata sarebbe 1. Quindi, se si parte dal principio di non ritenere la domanda banale, il significato da accettare è il secondo. Ma è sempre una interpretazione.

Perché si dà per scontato che le probabilità di maschio e femmina siano uguali? Ammesso che siano uguali prima di sapere che uno dei figli è femmina, questa informazione non fa cambiare la probabilità che l'altro figlio sia maschio? Forse la famiglia ha un'attitudine ad avere figlie femmine.

Perché la soluzione ingenua non va bene? Si tratta sempre di interpretare il significato del quesito da un punto di vista linguistico. La soluzione ingenua andava bene per una domanda posta nei seguenti termini: “...Sapendo che il primo figlio è femmina...” oppure “...Sapendo che il secondo figlio è femmina...”. Ma l'informazione “...Sapendo che uno dei figli è femmina...” è più complessa, è la disgiunzione (o unione) delle due affermazioni.

Una colpa della confusione nell'interpretazione è nell'enunciato “l'altro figlio sia maschio”. La parola “altro” non ha un significato logico e induce a

pensare che la premessa “...Sapendo che uno dei figli è femmina...” faccia riferimento al primo o al secondo figlio in particolare. Questo enunciato va tradotto nella formulazione logica: “almeno uno dei figli è maschio”.

Soluzione con i costituenti. Indichiamo con F1 e F2, rispettivamente, gli eventi “il primo figlio è femmina” e “il secondo figlio è femmina”. Indichiamo inoltre con M1 e M2, rispettivamente, gli eventi “il primo figlio è maschio” e “il secondo figlio è maschio”. Una partizione dell'evento certo appropriata per il quesito è {F1 F2, F1 M2, M1 F2, M1 M2}. L'informazione “uno dei figli è femmina” porta ad escludere il costituente M1 M2. Resta la partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2} e l'evento “almeno uno dei figli è maschio” è verificato in 2 casi su 3, per cui la risposta attesa da chi ha formulato il quesito è che la probabilità cercata è 2/3.

Un aspetto psicologico Il risultato di 2/3 può essere psicologicamente sorprendente. Qualcuno può ingenuamente chiedersi come è possibile che la probabilità a priori di un maschio, uguale a 1/2, aumenti, diventando 2/3, dopo aver osservato che c'è una femmina. In realtà l'equivoco nasce dalla forma dell'enunciato “l'altro figlio sia maschio”, che con la parola matematicamente indefinita “altro” non fa capire che il suo significato logico è “almeno uno dei figli è maschio”. Tale evento, prima di sapere che uno dei figli è femmina, era verificato in 3 casi su 4 e quindi aveva probabilità uguale a 3/4. Quindi in realtà l'informazione “uno dei figli è femmina” ha diminuito la probabilità di “almeno uno dei figli è maschio”, portandola da 3/4 a 2/3.

Ma veramente non ci dubbi? Ci sono tanti dubbi. Un pensatore con una mentalità analitica forse perderebbe tanto tempo a rispondere al quesito, scoprendo che vi sono tante cose date per scontate e che non lo sono affatto.

Perché dobbiamo ritenere che le probabilità dei costituenti nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2, M1 M2} siano tutte uguali? Perché dopo aver escluso il costituente M1 M2 riteniamo che le probabilità dei costituenti nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2} siano ancora tutte uguali? L'informazione che uno dei figli è femmina non potrebbe ad esempio far pensare ad una attitudine della famiglia ad avere figlie femmine?

In tal caso, se si ritenesse soggettivamente che F1 F2 possa avere probabilità doppia rispetto agli altri costituenti si otterrebbe la soluzione ingenua, la probabilità di “almeno uno dei figli è maschio” sarebbe 1/2!

Sono gli *assiomi della probabilità condizionata* che impongono che le probabilità dei vari costituenti F1 F2, F1 M2, M1 F2 nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2} siano *proporzionali* a quelle degli stessi costituenti nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2}.

Quale significato concreto si può dare a tale proporzionalità in qualche contesto in cui si considerano delle misure? Ad esempio se una partizione è vista come l'insieme dei componenti di un edificio, la proporzionalità potrebbe significare che togliendo un elemento di un edificio le relazioni fra gli elementi rimanenti rimangono inalterate. Se una partizione è l'insieme dei componenti di una famiglia la proporzionalità potrebbe significare che togliendo un componente della famiglia le relazioni fra gli altri componenti non cambiano. Ma è proprio così? Se non ci sembra corretto che sia così appare appropriato ottenere misure condizionate soddisfacenti a regole alternative rispetto alla proporzionalità. Alcune di esse sono chiamate “misure condizionate fuzzy”. In seguito vedremo un esempio.

Regole alternative alla proporzionalità Siano A e B due eventi con A contenuto in B. Indichiamo con $p(A/B)$ la probabilità dell'evento A una volta noto che si verifica B. La regola di proporzionalità della proprietà condizionata equivale alla seguente *proprietà moltiplicativa*.

Per ogni terna A, B, C di eventi tale che A è contenuto in B e B è contenuto in C, risulta

$$\text{(proprietà moltiplicativa)} \quad p(A/C) = p(A/B) p(B/C).$$

Infatti ponendo C uguale all'evento certo costituito dalla partizione $\{F1, F2, M1, M2\}$, B uguale all'evento “uno dei figli è femmina”, A uguale ad un costituente e $k = p(B/C)$, per ogni costituente A si ottiene:

$$p(A) = p(A/B) k,$$

dove k non dipende da A. Ossia le probabilità dei costituenti sono proporzionali alle probabilità dei costituenti condizionati a B.

Soluzione del quesito con la probabilità condizionata. Sia F l'evento “almeno un figlio è femmina” e M = “almeno un figlio è maschio”. Posto $A = FM$ nella formula moltiplicativa si ottiene

$$p(FM) = p(FM/F) p(F).$$

Essendo $p(F) = 3/4$, $p(FM) = 1/2$, dalla regola moltiplicativa si deduce che necessariamente deve essere $p(FM/F) = 2/3$.

Proviamo ad usare una alternativa alla regola moltiplicativa Una possibile alternativa è la seguente *proprietà del minimo*.

Per ogni terna A, B, C di eventi tale che A è contenuto in B e B è contenuto in C, risulta:

(proprietà del minimo) $p(A/C) = \min\{p(A/B), p(B/C)\}$.

La proprietà del minimo e la proprietà moltiplicativa sono due casi particolari applicazione del seguente *criterio generale di monotonia* che sembra ragionevole accettare.

Se A e B sono due eventi con A contenuto in B, allora, per ogni evento H vale la seguente:

(proprietà di monotonia) $p(A / B \cup H) \leq p(A / B) \leq p(A \cup H / B)$.

Ossia, aumentando l'evento condizionante, ossia aggiungendo un pezzo alla partizione, l'importanza dell'evento A diminuisce o resta uguale. Invece, a parità di partizione, se si aumenta l'evento A, la sua importanza aumenta o resta uguale.

Importante caratterizzazione. Richiedere la proprietà del minimo significa considerare per $p(A/C)$ il *massimo valore* che soddisfa la proprietà di monotonia.

Nel nostro problema, applicando la formula del minimo si ottiene:

$p(FM) = \min\{p(FM/F), p(F)\}$.

Essendo $p(F) = 3/4$, $p(FM) = 1/2$, dalla regola del minimo si deduce che necessariamente deve essere $p(FM/F) = 1/2$.

La regola del minimo concorda con la soluzione ingenua!

Che succede al genio? Un genio che avesse applicato criteri come la regola del minimo perché con opportuni ragionamenti li avesse ritenuti più adeguati (ad esempio riteneva opportuno considerare la massima probabilità compatibile con la proprietà di monotonia) avrebbe avuto un *esito negativo* in un esame basato su quesiti convenzionali a risposta chiusa!

La persona con spirito critico e che ha idee geniali ha spesso una intuizione brillante che però non è ancora formalizzata nei canali espressivi usuali e neanche segue i ragionamenti codificati.

Altra alternativa di discussione e di critica. Anche nelle ipotesi di:

- accettare l'assiomatica usuale del calcolo delle probabilità;
 - ammettere che il sesso del secondo figlio sia indipendente da quello del primo figlio;
- perché mai deve essere accettata l'ipotesi che la probabilità di un figlio maschio sia 1/2?

Appare invece corretto lasciare tale probabilità indeterminata e indicarla con x. Allora gli eventi F1 F2, F1 M2, M1 F2, M1 M2 hanno, rispettivamente,

probabilità $(1-x)^2$, $x(1-x)$, $x(1-x)$, x^2 , e applicando la regola di proporzionalità, gli eventi F1 F2, F1 M2, M1 F2 condizionati all'ipotesi che uno dei figli sia femmina, hanno probabilità $(1-x)^2/(1+x)$, $x/(1+x)$, $x/(1+x)$, dove x può essere un qualsiasi valore appartenente all'intervallo chiuso $[0, 1]$.

Una osservazione. Può essere $x = 1$ anche se si sa che un figlio è femmina? Sì, anche se potrebbe sembrare strano che si sia avuta una femmina quando la probabilità della femmina è nulla! Ma può succedere. Infatti è da precisare che un evento di probabilità nulla non necessariamente coincide con l'evento impossibile. I numeri reali appartenenti all'intervallo $[0, 1]$ non sono sufficienti per dare probabilità diverse ad ogni coppia di eventi con diversa facilità di verificarsi. Occorrerebbero i numeri iper-reali, ma ci sarebbero però altre difficoltà.....

In conclusione la probabilità di avere un figlio maschio sapendo che uno dei figli è femmina non è un numero, ma è la funzione

$$f(x) = (2x)/(1+x), \text{ con } x \text{ in } [0, 1].$$

Risulta $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e inoltre:

$$f'(x) = 2/(1+x)^2,$$

per cui, nelle ipotesi usuali di indipendenza fra il sesso del primo figlio e quello del secondo figlio e di validità della legge moltiplicativa per gli eventi condizionati la risposta giusta sarebbe indicare la funzione $f(x)$. Per $x = 1/2$ la funzione vale $2/3$, per $x = 1/3$ la funzione vale $1/2$.

Quindi i valori $1/3$ e $1/2$ possono andare entrambi bene come risposta al quesito e così ogni altro valore compreso nell'intervallo $[0, 1]$. Dipende dal valore a priori x .

La risposta corretta al quesito, nelle ipotesi accettate, è di dire che la probabilità che l'altro figlio è maschio è la funzione $f(x)$. Ma è prevista fra le 4 risposte al test?

La derivata $f'(x)$ è strettamente decrescente e passa dal valore 2 per $x = 0$ al valore $1/2$ per $x = 1$. Può avere qualche significato pratico? I valori più bassi sono più selettivi?

2.2 Il quesito dei tre prigionieri

Si sa che di tre prigionieri situati in celle diverse e che non possono comunicare, due saranno giustiziati e uno si salverà. Uno dei prigionieri chiede

alla guardia di conoscere il nome di uno degli altri due che verrà condannato. Qual è la probabilità di salvarsi dopo aver avuto tale informazione?

Soluzione ingenua: Siano A, B, C i tre prigionieri e siano C il prigioniero che ha ricevuto l'informazione dalla guardia e A il nome del prigioniero che viene indicato come condannato. Allora il prigioniero che si salva è o B o C, per cui la probabilità che C si salvi è $1/2$.

Soluzione con i costituenti Siano SA, SB, SC rispettivamente gli eventi "Si salva A", "Si salva B", "Si salva C". Siano inoltre IA, IB rispettivamente gli eventi "La guardia indica A", "La guardia indica B". Prima dell'informazione i costituenti sono SA, SB, SC. Per motivi di simmetria li possiamo ritenere equiprobabili per cui risulta $p(SC) = 1/3$.

Considerando l'informazione, prima che la guardia fornisca l'informazione i costituenti da considerare sono IA SB, IA SC, IB SA, IB SC. Se l'informazione indica che viene giustiziato A restano i costituenti IA SB, IA SC. Se essi fossero equiprobabili allora, poiché C si salva solo se si verifica il costituente IA SC, si arriverebbe alla soluzione ingenua.

Ma sono equiprobabili? La soluzione deriva da una semplice osservazione:

SB implica IA e SA implica IB, per cui $SB \cap IA = SB$, $SA \cap IB = SA$.

Quindi i costituenti iniziali sono in realtà SB, IA SC, SA, IB SC. Poiché SA e SB hanno entrambi probabilità $1/3$ segue che $p(IA \cap SC) + p(IB \cap SC) = 1/3$.

Se si assume che, a priori, i due eventi IA SC e IB SC sono equiprobabili le loro probabilità diventano entrambe $1/6$.

Dopo l'informazione che A viene giustiziato rimangono solo i costituenti SB, IA SC.

Se ammettiamo che le probabilità dopo l'informazione siano proporzionali a quelle prima dell'informazione deve risultare $p(SB) = 2 p(IA \cap SC)$ e quindi, dovendo essere $p(SB) + p(IA \cap SC) = 1$, segue che $p(SB) = 2/3$ e $p(IA \cap SC) = 1/3$. Una volta verificatasi l'informazione IA, risulta $IA \cap SC = SC$, per cui $P(SC) = 1/3$.

Se si vuole far valere la proprietà del minimo?

Se si vuole che, per ogni terna E, F, G di eventi tale che E è contenuto in F e F è contenuto in G, risulti:

$$\text{(proprietà del minimo)} \quad p(E/G) = \min\{p(E/F), p(F/G)\}.$$

allora, ponendo G uguale all'evento certo, $F = IA$, $E = IA \cap SC$, si ottiene:

$$p(IA \cap SC) = \min\{p(IA \cap SC / IA), p(IA)\}.$$

Essendo $p(\text{IA} \text{ SC}) = 1/6$, $p(\text{IA}) = 1/2$, si arriverebbe a $p(\text{IA} \text{ SC} / \text{IA}) = 1/6$. La situazione per il prigioniero C sarebbe ancora peggiore rispetto a quella che si ottiene con la proprietà moltiplicativa! Il modello con la proprietà del minimo sembra proprio inadeguato...a meno che non ci siano condizioni particolari che lo rendano plausibile.

Soluzione con il Teorema di Bayes. E' la più rapida a partire dalla regola moltiplicativa. Si ha:

$$p(\text{SC} / \text{IA}) = p(\text{SC IA}) / p(\text{IA}) = [p(\text{SC}) p(\text{IA/SC})] / p(\text{IA}) = [1/3 \cdot 1/2] / 1/2 = 1/3.$$

3. La valutazione statistica dei test

3.1 *La valutazione basata sulla funzione logistica.*

Generalmente la teoria statistica della valutazione delle risposte ai quesiti, o “Item Response Theory” (Baker, 2001; Rizopoulos, 2006; Reckase, 2009; Hambleton e Swaminathan, 1985; Ceccatelli et al. 2013a, 2013b) ammette come *assiomi* o *ipotesi a priori* che ci possano considerare due grandezze continue e misurabili:

X = grado di *abilità* (*preparazione/capacità*) dello studente;

P = *probabilità che lo studente dia la risposta esatta* ad un determinato quesito;

soddisfacenti almeno alle seguenti condizioni:

(C1) X varia nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$

(C2) P è una funzione crescente $P = P(x)$ (ma non necessariamente strettamente crescente) del valore x assunto da X ;

(C3) per x che tende a $-\infty$, la P tende a 0 e per x che tende a $+\infty$, la P tende a 1.

Si assume che l'abilità X sia nulla per lo “studente medio”. La probabilità P dipende dallo studente (ossia dalla sua abilità) e da altri parametri dipendenti dal tipo di quesito.

Usualmente si assume che la funzione $P(x)$ sia rappresentata dall'equazione logistica:

Fabrizio Maturo

$$P(x) = \frac{e^{a(x-b)}}{1 + e^{a(x-b)}}$$

dove a è un parametro positivo indicante il *grado di selettività* del quesito e b è un parametro reale indicante il *grado di difficoltà* del quesito stesso.

In particolare la funzione logistica ha le proprietà (C1), (C2), (C3).

La derivata della $P(x)$ è uguale a:

$$P'(x) = \frac{ae^{a(x-b)}}{(1 + e^{a(x-b)})^2}$$

la derivata seconda è:

$$P''(x) = \frac{a^2 e^{a(x-b)}(1 - e^{2a(x-b)})}{(1 + e^{a(x-b)})^4}$$

per cui il punto $x = b$ è un punto di flesso discendente, ossia un punto di massimo per la derivata, in cui la funzione vale $1/2$ e la derivata vale a .

3.2 Criteri alternativi di valutazione

Osserviamo che, se il punto di riferimento sono i valori a e b , rispettivamente il *grado di selettività* e il *grado di difficoltà* del quesito la funzione logistica può essere sostituita da una qualsiasi altra funzione che oltre ad avere le proprietà (C1), (C2), (C3) soddisfi alcuni requisiti di regolarità, dati dalle seguenti ulteriori condizioni:

(C4) la $P(x)$ è continua;

(C5) la $P(x)$ è generalmente derivabile, con derivata generalmente continua, ossia esiste al più un insieme finito di punti D in cui la derivata o non esiste o non è continua;

(C6) esiste un solo punto b non appartenente a D tale che la derivata $P'(x)$ è crescente in $(-\infty, b)$ e decrescente in $(b, +\infty)$ quindi la funzione $P(x)$ ha b_0 come *unico punto di flesso*;

(C7) $P'(b) = a$.

Il punto b rappresenta il *livello di abilità (preparazione/capacità)* in cui il quesito diventa *discriminatorio*, ossia quando X varia in un opportuno intorno di b l'incremento di P è molto elevato. Il valore $P(b)$ è la *probabilità di dare una risposta corretta al quesito* per un individuo con livello di abilità b . La derivata $P'(b)$ è il grado di selettività del quesito.

Quesiti e test di Probabilità e Statistica: un'analisi critica

Generalmente si assume che la funzione $P(x)$ dipenda da alcuni parametri c_1, c_2, \dots, c_n , i cui valori determinano b , $P(b)$ e la derivata $P'(b)$.

Può essere comodo richiedere l'ulteriore condizione;

$$(C8) P(b) = 1/2,$$

anche se non sembra una condizione indispensabile.

Sia $f(x)$ la derivata della funzione $P(x)$. Dalle condizioni (C1), ..., (C7) segue che la $f(x)$ ha le seguenti proprietà:

$$(D1) f(x) > 0 \text{ per ogni numero reale } x;$$

$$(D2) f(x) \text{ è continua in } \mathbb{R}-D, \text{ dove } D \text{ è un insieme vuoto o finito};$$

$$(D3) f(x) \text{ è integrabile in } \mathbb{R}, \text{ con } \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1;$$

$$(D4) \text{ esiste un solo punto di massimo } b \text{ e } f(b) = a.$$

Da un punto di vista formale, la $f(x)$ è la *densità di probabilità* di una distribuzione assolutamente continua e la $P(x)$ è la sua funzione di ripartizione.

In particolare, data una funzione $f(x)$ soddisfacente le condizioni (D1), ..., (D4) da essa si risale ad una funzione $P(x)$ soddisfacente le condizioni (C1), ..., (C7) ponendo $P(x) = \int_{(-\infty, x)} f(t) dt$.

La condizione aggiuntiva (C8) può essere soddisfatta in vari modi. Una semplice condizione è la simmetria della densità di probabilità $f(x)$ rispetto alla retta verticale $x = b$. Ciò è verificato se $f(x)$ è la derivata della funzione logistica.

Ma ci possono essere varie motivazioni per preferire una densità di probabilità non simmetrica ma dotata di opportune asimmetrie.

Osserviamo che, per ogni intervallo I di \mathbb{R} , $\int_I f(x) dx$ è la *variabilità della probabilità* che un individuo con abilità appartenente a I dia la risposta esatta al quesito.

In conclusione, anche se la scelta prevalente nella letteratura statistica relativa all'analisi dei test è stata quella di usare come funzione $P(x)$ la funzione logistica, fissati *grado di selettività* a ed il *grado di difficoltà* b del quesito possono essere presentate molte scelte alternative scegliendo una funzione densità di probabilità assolutamente continua $f(x)$ che abbia b come punto di massimo e tale che $f(b) = a$. La corrispondente funzione di ripartizione $P(x)$ ha lo stesso ruolo della funzione logistica dal punto di vista della selettività e della difficoltà del test. La simmetria della $f(x)$ assicura anche la proprietà $P(x) = 1/2$, equivalente alla (C8).

Scegliere la funzione logistica o altre funzioni di ripartizione dipende da proprietà aggiuntive che si vuole siano soddisfatte. L'analisi delle proprietà aggiuntive desiderate e quindi della funzione di ripartizione preferibile in particolari contesti può essere un interessante argomento di ricerca.

4. Proposte per una Fuzzy Item Response Theory

Ci sembra che l'incertezza nel definire il *grado di abilità* e quello nel determinare la *probabilità di dare la risposta esatta* in corrispondenza di un certo grado di abilità possa essere affrontato in maniera più approfondita considerando tali valori non come numeri reali ma piuttosto come numeri fuzzy. In tal caso le variabili X e P sono fuzzy e così le funzioni $P(x)$, $f(x)$ e $F(x)$ sostituite da funzioni fuzzy $P^*(x)$, $f^*(x)$ e $F^*(x)$ possono assumere, per ogni x , vari valori con vari gradi di appartenenza.

In maniera semplificata si può pensare che $F(x)$ sia un segmento con inclinazione a , passante per il punto $(b, 1/2)$ e con estremi sulle rette $P=0$ e $P=1$, ottenuto come parte retta regressione di P rispetto a X . Sostituendo alla regressione una regressione fuzzy si ottiene $P^*(x)$.

Bibliografia

Baker F.B. (2001) The basics of item response theory, ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, Washington

Ceccatelli C., Di Battista T., Fortuna F., Maturo F. (2013a). Best Practices to Improve the Learning of Statistics: The Case of the National Olympics of Statistic in Italy. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 93, 2194–2199. doi:10.1016/j.sbspro.2013.10.186

Ceccatelli C., Di Battista T., Fortuna F., Maturo F. (2013b). L'Item Response Theory come Strumento di Valutazione delle Eccellenze nella Scuola. *Science & Philosophy*, 1(1). Telematica Multiversum Editrice.

Di Battista, Tonio (2014). *Metodi statistici per la valutazione*. Franco Angeli.

Hambleton, R. K., & Swaminathan, H. (1985). Assumptions of Item Response Theory. *Item Response Theory*, 15–31. doi:10.1007/978-94-017-1988-9_2

Reckase, M. D. (2009). Unidimensional Item Response Theory Models. *Multidimensional Item Response Theory*, 11–55. doi:10.1007/978-0-387-89976-3_2

Rizopoulos D. (2006) ltm: An R package for latent variable modeling and item response theory analyses, *Journal of Statistical Software*, 17 (5), 1-25

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Ferdinando Casolaro¹, Luca Cirillo², Raffaele Prospero³

¹ Dipartimento di Architettura Università “Federico II” di Napoli
ferdinando.casolaro@unina.it

² Università degli Studi del Sannio di Benevento
luca.cirillo@unisannio.it

³ DISUFF Università degli Studi di Salerno
rprosperi@unisa.it

Sunto

Nel presente lavoro si propone la caratterizzazione delle Trasformazioni geometriche nello spazio, con particolare riferimento alle Isometrie ed alle Omotetie, con semplici dimostrazioni di carattere euclideo. Si evidenzia, inoltre, l'interrelazione tra la moderna classificazione delle Trasformazioni lineari in ambito proiettivo con il concetto di gruppo secondo Jordan, che permette di individuare le proprietà invarianti e, quindi, di proporre in alcuni casi anche giustificazioni di carattere proiettivo.

Keywords: Trasformazioni geometriche, isometrie, omotetie.

1 Introduzione

Le Trasformazioni dello spazio sono state proposte nei programmi Brocca negli anni '80 e, seppur con cenni, nelle Indicazioni nazionali della Scuola Secondaria di secondo grado con la riforma Berlinguer-De Mauro alla fine del secolo scorso.

Nei programmi del primo biennio, uno dei paragrafi del tema “*Geometria*” riguardava il riconoscimento delle “*simmetrie nei poliedri*”, senza accennare prima al concetto generale di *isometria nello spazio*, che si rimandava al successivo triennio.

Nel nostro lavoro riterremo noti le nozioni fondamentali della “*geometria dello spazio*”, in particolare quelle di parallelismo, di perpendicolarità e gli *enti fondamentali* quali diedro, triedro, poliedro, ecc., e procederemo direttamente

Ferdinando Casolaro, Luca Cirillo, Raffaele Prosperi

alla trattazione delle *isometrie* ed alla relativa classificazione, con cenni sulle composizioni e sui gruppi di isometrie.

Oltre le isometrie, daremo un cenno alle *omotetie* come particolari *similitudini* dello spazio; non riteniamo oggetto del nostro studio le affinità nello spazio.

Relativamente alle attuali “*Indicazioni nazionali*” per i licei, ci si limita a quanto segue (estratto dall’originale delle Indicazioni):

Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Personalmente riteniamo, però, che nelle Scuole di Formazione degli insegnanti si debba andare oltre le “*Indicazioni nazionali*” che, in generale sono relative al momento politico attuale; per preparare, invece, gli insegnanti del futuro, dobbiamo ripercorrere gli sforzi fatti dai didattici e pedagogisti della Matematica negli ultimi sessant’anni, dai quali emerge anche l’importanza delle conoscenze di quei concetti sviluppati negli ultimi 150 anni, come l’ampliamento del modello euclideo alle altre geometrie (Casolaro 2002, Casolaro, Pisano 2011), l’algebra lineare, una sempre maggiore razionalizzazione del calcolo delle probabilità e della Statistica.

Pertanto, l’esposizione pur essendo strutturata sul modello euclideo con le classiche dimostrazioni coerenti con “*gli Elementi*” di Euclide, conterrà alcune osservazioni di carattere proiettivo relative alla generalità delle Trasformazioni lineari (Cundari 1992, Casolaro 2003).

2 Definizioni e proprietà generali

Definizione 1. *Si dice isometria dello spazio, una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio, tale che se a due punti A e B corrispondono i punti A' e B' , i segmenti AB ed $A'B'$ sono congruenti.*

Si può osservare che la definizione di isometria è data ritenendo primitivo (secondo l’assiomatica di Hilbert) il concetto di congruenza tra segmenti. Altri autori capovolgono il concetto: precisamente, dalla definizione metrica di isometria si definisce la congruenza tra due figure dello spazio.

Definizione 2. *Due figure F ed F' dello spazio si dicono congruenti se esiste un’isometria I tale che $I(F) = F'$.*

La congruenza è una relazione di equivalenza; infatti valgono le proprietà:

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

- a) *Riflessiva*: ogni figura è congruente a se stessa. Infatti, la trasformazione che lascia fisso ogni punto (*identità*) è un'isometria.
- b) *Simmetrica*: Se F e G sono due figure dello spazio ed F è congruente a G , esiste un'isometria I tale che $G = I(F)$. Poiché un'isometria è un'applicazione biunivoca, esiste l'applicazione inversa I^{-1} che, ovviamente, è ancora una isometria. Allora anche la figura G è congruente ad F in quanto porta G in F .
- c) *Transitiva*: Se F, G, H , sono figure tali che G è mutata da F in un'isometria I ed H è mutata da G in un'isometria J , si ha evidentemente:

$$J \circ I(F) = J(G) = H$$

cioè:

$$F \text{ congruente } G; G \text{ congruente } H \Rightarrow F \text{ congruente } H.$$

Da a), b), c), risulta che:

- La composizione di due isometrie è ancora un'isometria, per cui l'insieme delle isometrie è chiuso rispetto al prodotto (conseguenza della proprietà transitiva).
- Esiste l'isometria che trasforma una figura in se stessa, detta *identità*, che rappresenta l'elemento neutro rispetto al prodotto (conseguenza della proprietà riflessiva).
- La corrispondenza inversa di I , cioè la trasformazione I^{-1} che fa corrispondere ad un punto P' il punto P da cui essa proviene mediante I , è anch'essa un'isometria, che rappresenta l'elemento simmetrico di I rispetto al prodotto (conseguenza della proprietà simmetrica).
- Il prodotto di isometrie gode della proprietà associativa.

Pertanto:

Le isometrie dello spazio formano gruppo di trasformazioni rispetto alla composizione (prodotto) di isometrie. (Casolaro, Prospero, 2011).

2.1 Proprietà generali delle isometrie

Proprietà 1. Se tre punti A, B, C dello spazio sono allineati, anche i punti corrispondenti A', B', C' sono allineati.

Dim.: supponiamo, per fissare le idee che, su un qualsiasi piano π che contiene la retta AB , il punto B sia tra A e C ; si ha: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$; per la proprietà delle isometrie nel piano di conservare le lunghezze dei segmenti, si ha anche:

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}.$$

Se i tre punti A', B', C' non fossero allineati, si avrebbe, per la disuguaglianza triangolare, la contraddizione:

$$\overline{A'C'} < \overline{A'B'} + \overline{B'C'}.$$

Ferdinando Casolaro, Luca Cirillo, Raffaele Prosperi

Proprietà 2. *Ad una retta corrisponde una retta; al punto comune a due rette corrisponde il punto comune alle due rette corrispondenti.*

Dim.: È una conseguenza della proprietà 1) e dall'essere biunivoca la corrispondenza.

Proprietà 3. *Ad un segmento corrisponde un segmento, ad una semiretta corrisponde una semiretta, ad un semipiano corrisponde un semipiano.*

Dim.: Basta ragionare per assurdo, utilizzando le due proprietà precedenti, e tenendo conto della proprietà additiva dei segmenti.

Proprietà 4. *A rette parallele corrispondono rette parallele.*

Dim.: per la proprietà 2), se alle rette a e b , parallele e non coincidenti, corrispondono le rette a' e b' , un eventuale punto comune ad a' e b' dovrebbe essere il corrispondente del punto comune ad a e b che sono parallele.

Proprietà 5. *Ogni isometria, in quanto applicazione biunivoca, conserva l'incidenza.*

Dim.: sia I un'isometria e H e K due sottoinsiemi dello spazio; per ogni punto P che appartiene ad $H \cap K$, il suo trasformato $P' = I(P)$ appartiene sia a $I(H)$ che a $I(K)$.

Proprietà 6. *Ad ogni angolo, convesso, piatto o concavo, corrisponde rispettivamente un angolo convesso, piatto o concavo. Angoli corrispondenti sono congruenti, quindi un'isometria conserva l'ampiezza degli angoli.*

Dim.: la prima parte della proprietà si ricava dalla proprietà 3). Per la seconda parte, basta considerare due angoli corrispondenti convessi. Sia $a \hat{O} b$ un angolo convesso dello spazio; l'angolo $a' \hat{O}' b'$ corrispondente ha per lati le semirette corrispondenti di a e di b e per vertice il punto O' corrispondente di O . Considerati, allora su a e b due punti qualsiasi A e B , i loro corrispondenti A' e B' sono su a' e b' . Per definizione di isometria si ha:

$$OA = O'A'; \quad OB = O'B'; \quad AB = A'B'.$$

I due triangoli ABC ed $A'B'C'$ verificano, quindi, le ipotesi del terzo criterio di congruenza dei triangoli. Si ha allora: $a \hat{O} b = a' \hat{O}' b'$, come volevasi dimostrare.

Proprietà 7. *Ad ogni poligono convesso corrisponde un poligono convesso; ad ogni poliedro convesso corrisponde un poliedro convesso.*

Dim.: anche questa proprietà è una conseguenza della proprietà 3).

Proprietà 8. *In un'isometria, ad un piano e ad un semipiano corrispondono, rispettivamente, un piano e un semipiano.*

Dim.: facciamo vedere che I muta piani in piani.

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Siano r ed s due rette incidenti di un dato piano α . Per la proprietà 2), le immagini di r ed s , secondo l'isometria I , sono due rette incidenti, che indichiamo rispettivamente, con r' ed s' . Se α' è il piano individuato da r' ed s' , dobbiamo dimostrare che $I(\alpha) = \alpha'$. A tal proposito, prendiamo un punto $P \in \alpha$ e mandiamo per P una retta qualsiasi t , incidente sia con r che con s (basta evitare le parallele per P ad r o ad s), indichiamo con M ed N le rispettive intersezioni di t con r ed s . Allora, la retta t viene trasformata dall'isometria I in una retta t' che contiene $P' = I(P)$ e che passa per $M' = I(M)$ e $N' = I(N)$; ma M' ed N' , come punti di r' ed s' stanno su α' e quindi anche la retta t' , compreso P' , giace completamente su α' . In conclusione, ogni punto P di α viene trasformato in un punto P' di α' , ossia I trasforma piani in piani.

Con osservazioni di carattere proiettivo, la dimostrazione di tale teorema è conseguenza delle proprietà delle *prospettività* tra piani.

Infatti, se σ è la prospettiva da un qualsiasi centro di proiezione S tra due piani α e α' , non sovrapposti, due qualsiasi rette incidenti r ed r' di α sono trasformate da σ in due rette incidenti s ed s' di α' . Poiché due rette non coincidenti identificano univocamente un piano, è evidente che il piano α è trasformato nel piano α' .

Per dimostrare che I trasforma semipiani in semipiani, consideriamo una retta r del piano α , che per la proprietà 2) è trasformata in una retta r' del piano α' ; se P e Q sono due punti di α situati nello stesso semipiano di bordo r , il segmento PQ non taglia r , per cui anche il segmento $P'Q'$ non taglia r' in quanto un'isometria conserva l'incidenza tra rette; dunque P' e Q' stanno dalla stessa parte di r' .

Conseguenza della proprietà sono le seguenti proprietà:

Proprietà 9. *Se tre semirette uscenti da un punto sono complanari, anche le semirette corrispondenti sono complanari.*

Proprietà 10. *In un'isometria, a semispazi corrispondono semispazi.*

Dim.: si ragiona in modo analogo alla dimostrazione della proprietà 8) nella trasformazione di semipiani in semipiani.

Proprietà 11. *In un'isometria, ad ogni sfera descritta attorno ad un punto arbitrario O (centro della sfera) corrisponde una sfera di ugual raggio attorno al trasformato O' (centro).*

Dim.: sia K una sfera di centro O e raggio r e sia $O' = I(O)$ il trasformato di O nell'isometria I . Se K' è la sfera di centro O' e raggio r , il trasformato $P' = I(P)$ di un punto $P \in K$ è situato certamente sulla sfera K' , in quanto deve risultare $OP = O'P' = r$, quindi $I(K)$ è contenuto in K' . Ripetendo il ragionamento, partendo da

K' e applicando la I^{-1} , vediamo che $I^{-1}(K')$ è contenuto in K . Pertanto $I(K) \equiv K'$ (Morelli 1989).

Tenendo conto che le isometrie tra piani sono similitudini, che, quindi, mutano circonferenze in circonferenze, e che in un'isometria tra piani si conservano le distanze, possiamo ragionare in termini di geometria proiettiva, prendendo in considerazione le sezioni di una sfera con i piani passanti per il centro della sfera stessa. Infatti, per la proprietà 8, ad un piano α per il centro della sfera Γ nell'isometria corrisponderà un altro piano β tale che ai punti della circonferenza intersezione tra piano α e sfera Γ corrisponderanno punti sul piano β ; al centro C delle circonferenze intersezioni di α con Γ corrisponderà il punto C' , che sarà, per la conservazione delle distanze tra i punti dei piani (Casolaro, Cirillo, 1996), equidistante dai trasformati P' su β dei punti P della circonferenza Γ ; per tale motivo, i punti P' , equidistanti da C' e trasformati dei punti P della circonferenza Γ , si troveranno anch'essi su una circonferenza Γ' . Possiamo quindi affermare che in un'isometria ad una circonferenza (Γ) corrisponde ancora una circonferenza (Γ').

Poiché ciò vale per qualsiasi piano per il centro della sfera e, quindi per qualsiasi cerchio massimo, si evince che la sfera K si muta nella sfera K' .

Conseguenze immediate delle proprietà delle isometrie; un'isometria trasforma:

- *convessi in convessi,*
- *diedri (e loro interni) in diedri (e loro interni),*
- *triedri in triedri,*
- *tetraedri in tetraedri.*

Un'isometria, oltre a conservare le relazioni di parallelismo tra rette, conserva le relazioni di parallelismo tra piani (a piani paralleli corrisponde piani paralleli), e tra rette e piani (una retta ed un piano, paralleli tra loro, sono trasformati in una retta ed un piano paralleli tra loro).

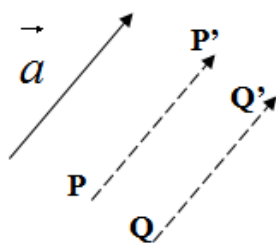
2.2 Isometrie Particolari

Le isometrie dello spazio si possono classificare in vari tipi. Esaminiamo dapprima i casi particolari di isometria.

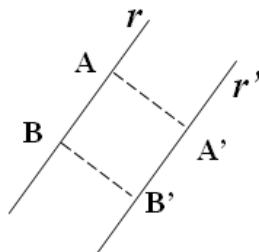
2.2.1 Traslazione

Definizione 3. Dato un vettore \vec{a} , si dice traslazione di modulo a la corrispondenza t_a che ad un punto P associa il punto P' tale che il segmento orientato PP' appartiene al vettore \vec{a} ((Figura 1).

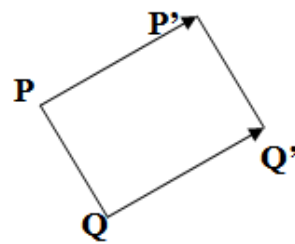
Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie



(Figura 1)



(Figura 2)



(Figura 3)

Poiché un *vettore* è una classe di segmenti orientati equipollenti, cioè di segmenti appartenenti a rette aventi la stessa direzione, possiamo affermare che:

Una traslazione sposta tutti i punti in una stessa direzione.

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

Proprietà 1. *Due rette corrispondenti sono parallele.*

Dim.: se ad r corrisponde r' (**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**), considerati i punti A e B su r ed i corrispondenti A' e B' su r' , si ha che i segmenti AB ed $A'B'$ sono lati opposti di un parallelogramma e quindi sono paralleli.

Proprietà 2. *Le traslazioni sono isometrie.*

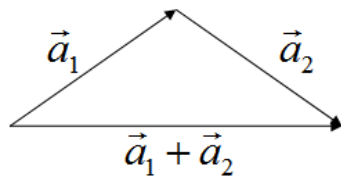
Dim.: siano P' e Q' i corrispondenti di due punti P e Q dello spazio; i segmenti PP' e QQ' sono paralleli e congruenti perché appartengono allo stesso vettore (Figura 3). Allora il quadrilatero $PP'Q'Q'$ è un parallelogramma e quindi risulta:

$$PQ = P'Q'$$

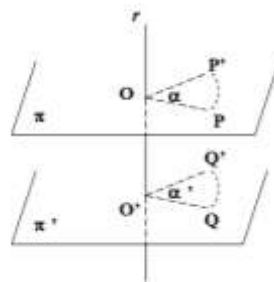
Fra le traslazioni dello spazio c'è da considerare anche l'*identità*, cioè la corrispondenza che ad ogni punto associa il punto stesso (*traslazione di vettore nullo*).

Proprietà 3. *L'insieme T delle traslazioni dello spazio forma gruppo abeliano rispetto al prodotto di trasformazioni.*

Dim.: se t_1 e t_2 sono due traslazioni (Figura 4) di vettori rispettivamente \vec{a}_1 e \vec{a}_2 , la traslazione $t_1 \circ t_2$ è individuata dal vettore $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ secondo la legge del parallelogramma.



(Figura 4)



(Figura 5)

- (i) Poiché l'insieme dei vettori è chiuso rispetto alla somma, l'insieme delle traslazioni è chiuso rispetto al prodotto.
- (ii) La traslazione di modulo il vettore nullo (l'identità), è l'elemento neutro rispetto al prodotto.
- (iii) Il vettore \vec{a}_1 individua la traslazione t_1 , il vettore $-\vec{a}_1$, cioè il vettore che ha modulo e direzione di \vec{a}_1 ma verso opposto, individua il simmetrico (rispetto al prodotto) della traslazione t_1 .
- (iv) La somma di vettori gode della proprietà associativa, per cui il prodotto di traslazioni è associativo.

E poiché la somma di vettori gode anche della proprietà commutativa, il gruppo delle traslazioni dello spazio è abeliano.

2.2.2 Rotazione intorno a una retta.

Definizione 4. Data una retta r , su un piano perpendicolare ad r , un angolo orientato di ampiezza α , si dice rotazione di asse r la corrispondenza r_α che ad ogni punto di r fa corrispondere lo stesso punto e ad un punto P non appartenente ad r fa corrispondere il punto P' che è sul piano per P perpendicolare ad r ed è tale che, detto O l'intersezione di questo piano con r , risulta: 1) $PO = P'O$; 2) l'angolo orientato $\widehat{POP'}$ abbia ampiezza α .
L'origine riferimento non è stata trovata..

$$r_\alpha : \begin{cases} O \rightarrow O, & \forall O \in r \\ P \rightarrow P' \Rightarrow \begin{cases} OP = OP' \\ \widehat{POP'} = \alpha \end{cases} \end{cases}$$

Osservazione. La rotazione che ha per asse la retta r , nello spazio subordina su ogni piano π perpendicolare ad r , una rotazione che ha il centro nel punto di intersezione di π con r ed ampiezza α .

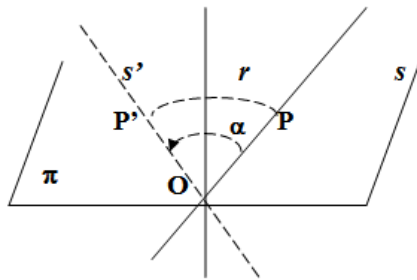
Nel caso particolare che l'ampiezza della rotazione è quella di un angolo piatto, allora essa coincide con la rotazione inversa, ed è una simmetria assiale.

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

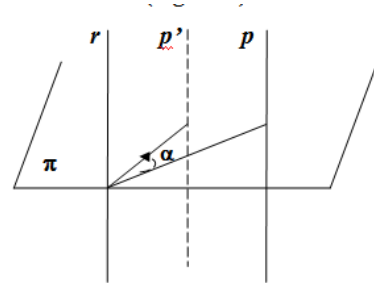
Come nelle trasformazioni del piano si studia la rotazione intorno ad un punto e si vede che essa è un'isometria, analogamente, nello spazio, si definisce la rotazione intorno ad una retta che è un'isometria dello spazio.

In una rotazione r_α , di asse r ed ampiezza α , si ha che:

- una retta s , incidente r in un punto O , si trasforma in una retta s' incidente r ancora in O e tale che l'angolo diedro, avente per spigolo r e per facce i piani individuati rispettivamente dalla coppia di rette r ed s e dalla coppia di rette r ed s' abbia le sezioni normali uguali ad α (Figura 6)

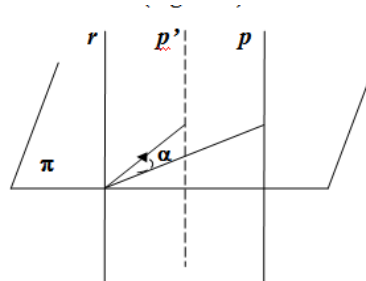


(Figura 6)



(Figura 7)

- una retta p , parallela ad r , si trasforma in una retta p' parallela ad r e a p e tale che l'angolo diedro, avente per spigolo r e per facce i piani individuati rispettivamente dalla coppia di rette r e p e dalla coppia di rette r e p'



abbia le sezioni normali uguali ad α

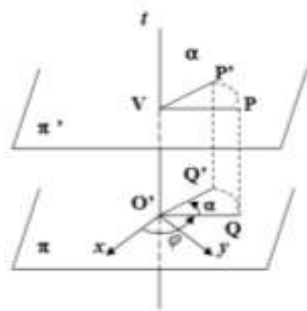
-
- (Figura .
- una retta q , non parallela e non incidente con l'asse r , si trasforma in una retta q' sghemba con r .

Proposizione 2. *Le rotazioni coassiali formano gruppo abeliano di trasformazioni.*

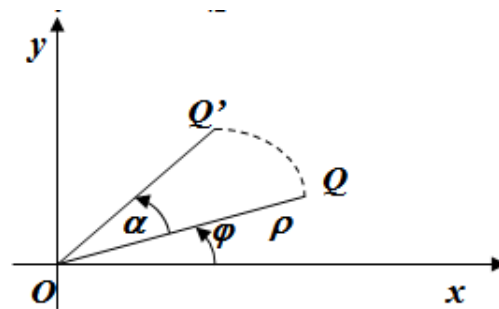
Dim.: se r_α e r_β sono due rotazioni intorno alla retta r , il prodotto $r_\alpha \circ r_\beta$ è la rotazione, ancora di asse r , che ha per ampiezza $\alpha + \beta$; pertanto l'insieme delle rotazioni coassiali è chiuso rispetto al prodotto.

- (i) L'identità si può considerare come una rotazione di ampiezza nulla ed asse arbitrario; pertanto non è riduttivo considerare l'identità come rotazione di ampiezza nulla ed asse r , che individua l'elemento neutro rispetto al prodotto di rotazioni.
- (ii) La corrispondenza inversa di una rotazione r_α , di ampiezza α ed asse r , è la rotazione di ampiezza $-\alpha$ che ha ancora asse r , e rappresenta il simmetrico di r_α .
- (iii) Si verifica facilmente che la composizione di rotazioni aventi lo stesso asse è associativa e commutativa.

Per determinare le equazioni cartesiane di una rotazione nello spazio, è opportuno fissare un riferimento monometrico ortogonale $Oxyz$, in cui l'asse z coincide con t e l'origine O è l'intersezione dell'asse di rotazione t con un piano π perpendicolare a t ; gli assi x ed y sono due rette (perpendicolari tra loro) del piano π passanti per O (Figura 8).



(Figura 8)



(Figura 9)

Se $P(x, y, z)$ è un punto dello spazio, il corrispondente $P'(x', y', z')$ è tale che $z' = z$, in quanto la rotazione avviene su un piano perpendicolare all'asse.

Indicando con Q e Q' le proiezioni ortogonali dei punti P e P' nel piano π (cioè sul piano $Oxyz$), da semplici proprietà di geometria elementare dello spazio, si deduce che i triangoli VPP' e OQQ' sono congruenti e quindi anche le coordinate x, y di P e di Q sono uguali alle corrispondenti coordinate x', y' di P' e di Q' . Posto $OQ = \rho$, ed indicato con φ l'angolo che la semiretta OQ forma con il semiasse positivo delle ascisse **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} (*)$$

Tenendo conto che $Q\hat{O}Q' = P\hat{V}P' = \alpha$, le coordinate di P' sono date da:

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

$$\begin{cases} x' = \rho \cos(\varphi + \alpha) \\ y' = \rho \sin(\varphi + \alpha) \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \rho \cos \varphi \cos \alpha - \rho \sin \varphi \sin \alpha \\ y' = \rho \cos \varphi \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

Sostituendo i valori delle equazioni (*) si ha:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

che rappresentano le equazioni della rotazione di asse la retta t coincidente con l'asse z .

Infatti, è facile verificare che il determinante della matrice dei coefficienti vale uno.

Un altro modo di esprimere le equazioni di una rotazione nello spazio è quello di considerare la rappresentazione in **coordinate cilindriche**.

Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, si assuma nel piano $x y$ un sistema di coordinate polari col polo nell'origine e l'asse polare coincidente col semiasse positivo delle x **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..**

Dato un punto $P(x, y, z)$, e detta Q la proiezione di P sul piano $x y$, siano ρ e ϑ le coordinate polari di Q , giacché risulta $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$.

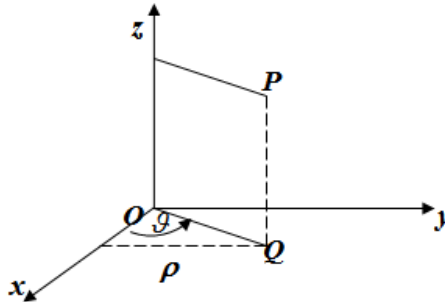


Figura 10

Il punto P è univocamente determinato dalle coordinate polari (ρ, ϑ) di Q e

dalla sua terza coordinata z : $P(\rho, \vartheta, z)$, con

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases}$$

I numeri ρ, ϑ, z prendono il nome di **coordinate cilindriche** del punto P .

Tale denominazione è giustificata dal fatto che, fissato $\rho > 0$, al variare di ϑ e z , il punto (ρ, ϑ, z) descrive la superficie cilindrica S_ρ passante per P con le generatrici parallele all'asse z ed aventi per direttrice la circonferenza del piano xy di centro O e raggio ρ .

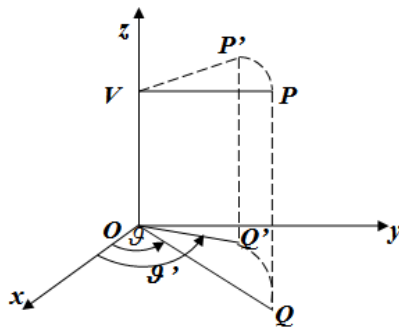


Figura 11

Con riferimento alla Figura 11, si può affermare che la rotazione di ampiezza α ha, in coordinate cilindriche, equazioni:

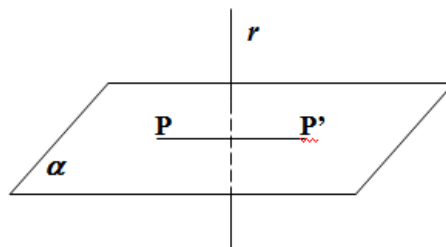
$$\begin{cases} \rho' = \rho \\ \vartheta' = \vartheta + \alpha \\ z' = z \end{cases}$$

2.2.3 Simmetria assiale

Definizione. Data, nello spazio, una retta r , si dice simmetria assiale di asse r la corrispondenza s_r dello spazio nella quale ad ogni punto di r corrisponde il punto stesso e ad un qualsiasi altro punto P corrisponde il punto P' situato sulla perpendicolare per P ad r e tale che, nel piano α individuato dalla retta r e dal punto P , i punti P e P' siano equidistanti da r , in semipiani opposti rispetto ad r .

Una simmetria assiale è un'isometria dello spazio che gode delle seguenti proprietà:

- è una trasformazione involutoria;
- ha come punti uniti tutti e soli i punti dell'asse; le rette unite sono l'asse e tutte le rette incidenti ed ortogonali all'asse; i piani uniti sono:
 - (i) tutti i piani ortogonali all'asse
 - (ii) tutti i piani passanti per l'asse r .



(Figura 12)

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Proposizione 3. Su ogni piano π , perpendicolare alla retta r , la s_r subordina su π l'isometria (simmetria centrale di centro P_o) che ha come unico punto fisso il punto P_o , intersezione di π con r .

Si può facilmente verificare che si tratta della simmetria centrale del piano π rispetto a P_o . Dallo studio delle isometrie del piano è noto che tale simmetria si può ottenere come composizione di due simmetrie assiali piane che hanno come assi due rette incidenti in P_o e tra loro perpendicolari.

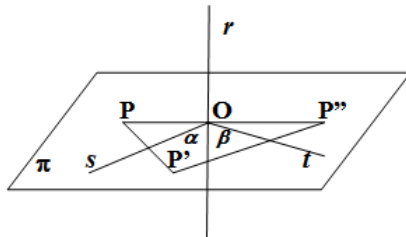
Proposizione 4. Su ogni piano π passante per la retta r , la s_r subordina l'isometria (simmetria assiale del piano di asse r) che ha come punti fissi i punti di r .

Riferendoci alle relazioni tra rette e piani, si può ottenere la simmetria assiale come composizione di due simmetrie planari. Precisamente:

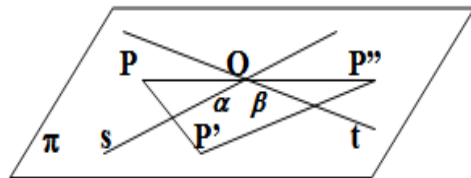
Proposizione 5. La simmetria assiale s_r , rispetto ad una retta r , si può ottenere come composizione di due simmetrie rispetto a due piani qualsiasi, passanti per r e perpendicolari tra loro.

Dim.: siano α e β due piani per r perpendicolari tra loro (Figura 13), e siano

- σ_α la simmetria rispetto al piano α che porta il punto P nel punto $P' = \sigma_\alpha(P)$
- σ_β la simmetria rispetto al piano β che porta il punto P' nel punto $P'' = \sigma_\beta(P') = \sigma_\beta[\sigma_\alpha(P)]$.



(Figura 13)



(Figura 14)

La corrispondenza $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ che porta P in P'' è una corrispondenza del piano π individuato dai punti P, P', P'' ; tale piano è perpendicolare sia ad α che a β (e quindi a $r = \alpha \cap \beta$), in quanto PP' è perpendicolare a α e $P'P''$ è perpendicolare sia ad α che a β .

Le tracce s e t dei piani α e β su π sono perpendicolari tra loro, per cui indicato con O il punto di intersezione tra s e t **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, si ha:

- (i) σ_α subordina su π una simmetria assiale σ_s di asse s , per cui essendo s l'asse del segmento PP' , risulta $PO = P'O$

Ferdinando Casolaro, Luca Cirillo, Raffaele Proserpi

(ii) σ_β subordina su π una simmetria assiale σ_t di asse t , per cui essendo t l'asse del segmento $P'P''$, risulta $P'O = P''O$

Pertanto, dalle due precedenti considerazioni, si ricava che $PO = P''O$.

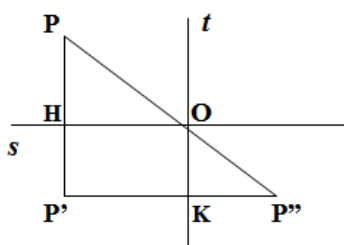
Inoltre i punti P, O, P'' sono allineati **Erroro. L'origine riferimento non è stata trovata.** in quanto:

s è bisettrice di $P\hat{O}P'$, quindi $H\hat{O}P' = \frac{1}{2}P\hat{O}P'$

t è bisettrice di $P'\hat{O}P''$, quindi $P'\hat{O}K = \frac{1}{2}P'\hat{O}P''$

Sommando membro a membro:

$$H\hat{O}P' + P'\hat{O}K = \frac{1}{2}(P\hat{O}P' + P'\hat{O}P'') \quad \text{cioè:} \quad H\hat{O}K = \frac{1}{2}(P\hat{O}P'').$$



(Figura 15)

Essendo $H\hat{O}K = 90^\circ$ si ricava che $P\hat{O}P'' = 180^\circ$, cioè i punti P, O, P'' sono allineati.

Pertanto, tenendo conto della proposizione 3, il punto P'' è il corrispondente di P nella simmetria s_0 centrale di centro O del piano π . La composizione $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta : P \rightarrow P''$ è una simmetria assiale che subordina su π una simmetria centrale.

Di tale proprietà si può dare anche una dimostrazione di carattere analitico che permette di dedurre le equazioni della trasformazione.

Dati due piani α e β tra loro perpendicolari, siano s_α ed s_β le simmetrie planari rispetto a tali piani. Se r è la retta di intersezione di α con β , prendiamo come sistema di riferimento quello che ha r come asse z ed un piano qualsiasi perpendicolare a z come piano xy ; allora, per ogni punto $P(x, y, z)$, scegliendo α come piano xz e β come piano yz , si hanno le seguenti equazioni:

$$s_\alpha : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases} \qquad s_\beta : \begin{cases} x'' = -x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases}$$

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Componendo le due simmetrie (sia $s_\alpha \circ s_\beta$ che $s_\beta \circ s_\alpha$) si ottiene una trasformazione che è, ovviamente, un'isometria con la seguente rappresentazione:

$$s_\beta \circ s_\alpha : \begin{cases} x'' = -x \\ y'' = -y \\ z'' = z \end{cases} \qquad s_\alpha \circ s_\beta : \begin{cases} x = -x'' \\ y = -y'' \\ z = z'' \end{cases}$$

che rappresentano le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta r che coincide con l'asse z .

Infatti, è facile verificare che:

- il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a 1
- l'asse z , ossia la retta $r = \alpha \cap \beta$ è una retta di punti fissi
- preso un punto $P(x, y, z)$, il punto $P_0(0, 0, z)$, proiezione di P su z , è tale che $PP_0 = P'P'_0 = \frac{1}{2}PP'$, ossia P_0 è il punto medio del segmento PP'
- invertendo l'ordine di composizione si ottengono le stesse equazioni, cioè la stessa trasformazione; tale trasformazione è la simmetria assiale s_r di asse r
- la trasformazione (simmetria di asse r) è completamente indipendente dalla scelta iniziale dei piani α e β , tranne che per il fatto di avere come intersezione r e di essere tra loro perpendicolari; infatti, prendendo altri due piani α' e β' , e scegliendo il riferimento in modo analogo, otteniamo le stesse equazioni per la s_β e s_α , che ci garantiscono le stesse relazioni tra P , P_0 e P' , indipendenti dal riferimento scelto.

2.2.4 Simmetria Planare

Definizione 1. Dato un piano α , si dice simmetria planare rispetto al piano α (piano di simmetria), la corrispondenza s_α che ad ogni punto di α fa corrispondere lo stesso punto e ad un qualsiasi punto P fa corrispondere il punto P' che è sulla perpendicolare per P ad α , nel semispazio opposto e ad uguale distanza da α Figura 16.

Pertanto, una simmetria planare è un'isometria dello spazio che gode delle seguenti proprietà:

- lascia fisso ogni punto di α e scambia i semispazi opposti rispetto ad α ; cioè se $A \notin \alpha$, e se $A' = s_\alpha(A)$, i punti A e A' si trovano in semispazi opposti;
- è involutoria, cioè:

$$A' = s_\alpha(A) \Rightarrow A = s_\alpha(A')$$

condizione espressa dalla relazione: $s_\alpha \circ s_\alpha = \text{Identità}$

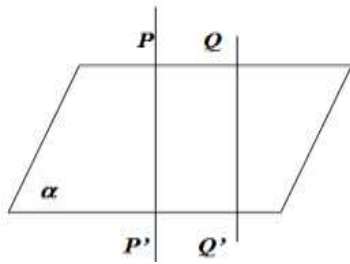


Figura 16

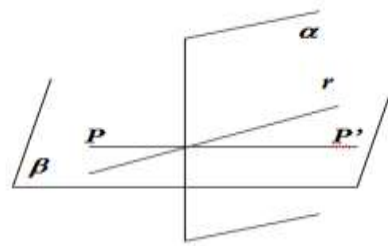


Figura 17

- la retta AA' (come ogni retta perpendicolare ad α) è trasformata in sé, cioè la retta AA' è unita in s_α .

Osservazione

Una simmetria planare s_α rispetto ad un piano α subordina su ogni piano β perpendicolare ad α una simmetria assiale s_r (avente per asse la retta r intersezione di α e β) (Cundari, 1992).

Con riferimento alla Figura 17:

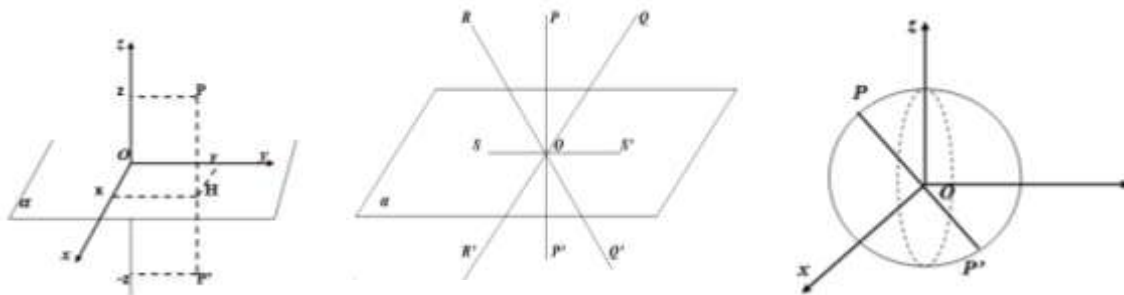
$$\begin{aligned}
 &PP' \perp \alpha \\
 &\beta \perp \alpha \\
 &r = \alpha \cap \beta \\
 &s_\alpha(P) = P' \Rightarrow s_r(P) = P'
 \end{aligned}$$

Per dare una rappresentazione cartesiana della simmetria rispetto ad un piano α , conviene scegliere un riferimento opportuno in cui gli assi delle x e delle y siano situati sul piano α .

Se s_α è la simmetria di cui si vogliono trovare le equazioni, prendiamo su α due rette perpendicolari x ed y , incidenti in O , e come asse z consideriamo la retta perpendicolare ad α in O . **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** Una volta fissato un verso su x , y e z , è stabilito un riferimento cartesiano ortogonale.

Se $P(x, y, z)$ è un punto dello spazio, il simmetrico $P'(x', y', z') = s_\alpha(P)$ ha evidentemente le coordinate espresse da:

$$\begin{cases}
 x' = x \\
 y' = y \\
 z' = -z
 \end{cases}$$



Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

(Figura 18)

(Figura 19)

(Figura 20)

che rappresentano le *equazioni della simmetria planare* rispetto al piano α nel riferimento $Oxyz$

In modo analogo si ottengono le equazioni delle simmetrie

$$\text{rispetto al piano } zy: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{e rispetto al piano } xz: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

Per ciascuno dei sistemi di equazioni appena introdotti si può verificare che il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a -1 .

2.2.5 Simmetria Centrale

Definizione 1. Dato un punto O , si dice *simmetria centrale di centro O* (centro di simmetria) la corrispondenza s_o che ad O fa corrispondere O stesso e ad un punto qualsiasi P fa corrispondere il punto P' tale che O sia il punto medio tra P e P' . **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..**

Un altro modo per definire la *simmetria centrale* è il seguente:

Definizione 2. Dato un punto O dello spazio, si dice *simmetria centrale di centro O* la corrispondenza s_o dello spazio nella quale al punto O corrisponde il punto O stesso e ad un qualsiasi altro punto P corrisponde l'ulteriore punto P' intersezione della retta PO con la superficie sferica di centro O e raggio OP . **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..**

Pertanto, una simmetria centrale è una isometria dello spazio che gode delle seguenti proprietà:

- è una trasformazione involutoria
- ha l'unico punto fisso nel centro O , tutte le rette per O sono unite e tutti i piani per O sono uniti.

Osservazione. Una simmetria centrale s_o di centro O subordina su ogni piano della stella di centro O una simmetria centrale rispetto ad O .

Proposizione 2. La simmetria centrale s_o si può ottenere come composizione di tre simmetrie rispetto a tre piani passanti per O e a due a due perpendicolari.

Dim.: Consideriamo tre piani α, β, γ , tra loro a due a due perpendicolari, tutti passanti per il punto O , e le simmetrie $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ rispetto a tali piani. Fissato un riferimento cartesiano ortogonale che abbia α, β, γ come piani coordinati, la composizione delle tre simmetrie (ovviamente indipendente dall'ordine di composizione) è un'isometria che ha la seguente rappresentazione:

$$s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha : \begin{cases} x'' = -x \\ y'' = -y \\ z'' = -z \end{cases}$$

Tali formule rappresentano le *equazioni della simmetria centrale* s_o di centro O . Infatti è facile verificare che:

- il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a -1 ;
- ha un solo punto fisso: il punto O comune ai tre piani e origine del riferimento;
- se P' (x', y', z') è il trasformato di P (x, y, z) mediante s_o , risulta:

$$PO = P'O = \frac{1}{2} PP'$$

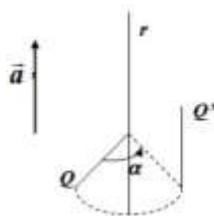
Inoltre scegliendo tre piani qualsiasi, tra loro mutuamente perpendicolari e passanti per O , sviluppando un ragionamento analogo al caso della simmetria assiale, si ottiene ancora una trasformazione che porta P in P' , in modo che O risulta punto medio di PP' , ossia ancora s_o ; la trasformazione risulta, allora, indipendente dalla scelta iniziale dei tre piani.

2.3 Ulteriori Particolari Isometrie

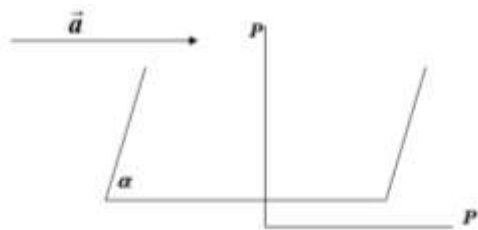
Attraverso opportune composizioni di due delle isometrie finora considerate, si possono ottenere altri casi particolari di isometria:

- 1) *Composizione di una rotazione intorno ad una retta r per una traslazione avente la direzione di r : Movimento Elicoidale (o Rototraslazione) Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..*

Il movimento elicoidale è rappresentato dalla trasformazione che porta Q in Q' , ottenuta componendo la rotazione di ampiezza α con la traslazione di modulo \mathbf{a} (entrambe non ridotte all'identità).



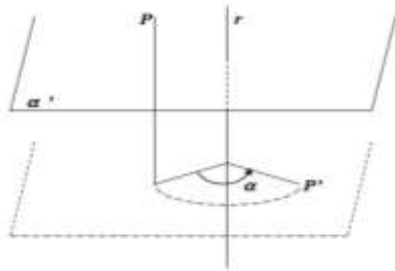
(Figura 21)



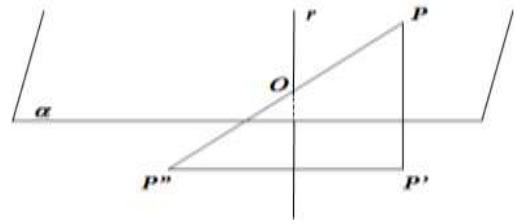
(Figura 22)

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

- 2) *Composizione di una simmetria planare rispetto ad un piano α con una traslazione (non identica) avente la direzione parallela al piano α : **Glissosimmetria (O Antitraslazione)** (Figura 22).*
- 3) *Composizione di una simmetria planare, rispetto ad un piano α con una rotazione non nulla, intorno ad una retta perpendicolare ad α : **Antirotazione** (Figura 23).*



(Figura 23)



(Figura 24)

- 4) *Composizione di una simmetria planare rispetto ad un piano α per una simmetria assiale, avente per asse una retta r perpendicolare ad α : è la **simmetria centrale** rispetto al punto di intersezione di r e di α*
- 5) (Figura 24).

Teorema Fondamentale

Le isometrie dello spazio si possono ottenere tutte mediante le simmetrie planari. Precisamente si ha il seguente teorema:

Ogni isometria dello spazio è il prodotto di al più quattro simmetrie planari. Precisamente, l'isometria può essere una simmetria planare, oppure è il prodotto di due, o di tre, o di quattro simmetrie planari.

Dim.: la dimostrazione di questo teorema si fonda sulle seguenti osservazioni: *se un'isometria dello spazio non è un'identità e un punto A è unito per essa, detti P e P' due punti corrispondenti distinti, il piano di simmetria π del segmento PP' passa per A .*

Infatti, se A è unito in I , e se $P' = I(P)$ deve risultare $\overline{AP} = \overline{AP'}$, e quindi A deve appartenere al piano di simmetria π del segmento PP' .

Indicato con σ una qualsiasi isometria, distinguiamo i seguenti casi:

1. In σ quattro punti A, B, C, D , non complanari sono uniti. In questo caso σ è l'identità I : infatti se σ non fosse l'identità, detti P e P' due punti corrispondenti distinti, il piano di simmetria del segmento PP' dovrebbe

passare per A, B, C, D e che risulterebbero, quindi, punti complanari contro l'ipotesi.

2. In σ tre punti A, B, C , non allineati distinti sono uniti (non escludendo che vi siano altri punti uniti). In questo caso σ o è l'identità I o è la simmetria planare rispetto al piano π individuato da A, B, C . Infatti se σ non è l'identità, e se P e P' sono due punti distinti corrispondenti in σ e non appartenenti a π , il piano di simmetria del segmento PP' , dovendo passare per A, B e C deve coincidere con π . Consideriamo la simmetria s_π rispetto al piano π (che porta P' in P), l'isometria $s_\pi \circ \sigma$, prodotto della isometria data σ per la simmetria planare s_π , è tale che:

$$s_\pi \circ \sigma : P \rightarrow P' \rightarrow P,$$

per cui il punto P è unito nell'isometria $s_\pi \circ \sigma$. Poiché anche i punti A, B e C sono uniti in $s_\pi \circ \sigma$ (in quanto uniti sia in σ – per ipotesi – sia in s_π perché appartengono al piano di simmetria π), l'isometria $s_\pi \circ \sigma$, avendo quattro punti non complanari uniti è – per il caso precedente – l'identità I :

$$s_\pi \circ \sigma = I$$

Moltiplicando a sinistra per s_π , si ha:

$$s_\pi \circ s_\pi \circ \sigma = s_\pi \circ I$$

e, tenendo conto che $s_\pi \circ s_\pi = s_\pi^2 = I$, si ha:

$$I \circ \sigma = s_\pi \circ I$$

cioè:

$$\sigma = s_\pi$$

Pertanto σ è la simmetria rispetto al piano π .

3. In σ due punti (almeno) A e B sono uniti. In questo caso σ o è l'identità I o è la simmetria planare o è il prodotto di due simmetrie planari (rispetto a due piani π_1 e π_2 del fascio di piani di asse la retta AB). Infatti, se σ non è l'identità, detti P e P' due punti distinti corrispondenti in σ e non appartenenti a π , il piano di simmetria del segmento PP' , che contiene la retta AB . Sia s_π la simmetria rispetto al piano π , nell'isometria prodotto $s_\pi \circ \sigma$ i punti A, B e P sono uniti, quindi l'isometria avendo tre punti uniti, per il caso precedente si ha:

$$s_\pi \circ \sigma = I \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s'$$

dove s' è una simmetria planare.

Da queste uguaglianze moltiplicando a sinistra per s_π , si ha:

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

$$\sigma = s_\pi \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s'$$

Pertanto, σ è la composizione di due simmetrie planari.

4. In σ un punto A (almeno) è unito. In questo caso σ o è l'identità o è una simmetria planare o è il prodotto di due simmetrie planari o è il prodotto di tre simmetrie planari. Infatti, se σ non è l'identità, detti P e P' due punti distinti corrispondenti in σ e non appartenenti a π , il piano di simmetria del segmento PP' che passa per A . Sia s_π la simmetria rispetto al piano π dell'isometria $s_\pi \circ \sigma$, i punti A e P sono uniti, quindi l'isometria avendo due punti uniti, per il caso precedente si ha:

$$s_\pi \circ \sigma = I \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \circ s''$$

dove s' e s'' sono due simmetrie planari.

Da queste uguaglianze, moltiplicando a sinistra per s_π , si ha:

$$\sigma = s_\pi \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \circ s''$$

Pertanto, σ è la composizione di tre simmetrie planari.

5. In σ non si suppone unito alcun punto. In questo caso σ o è l'identità o è una simmetria planare o è il prodotto di due simmetrie planari o è il prodotto di tre simmetrie planari o è il prodotto di quattro simmetrie planari. Infatti, se σ non è l'identità, detti P e P' due punti distinti corrispondenti in σ e non appartenenti a π , il piano di simmetria del segmento PP' . Sia s_π la simmetria rispetto al piano π dell'isometria $s_\pi \circ \sigma$, poiché risulta che il punto P è unito, quindi l'isometria avendo un solo punto unito, per il caso precedente si ha:

$$s_\pi \circ \sigma = I \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \circ s'' \text{ oppure} \\ s_\pi \circ \sigma = s' \circ s'' \circ s'''$$

dove s' e s'' e s''' sono due simmetrie planari.

Da queste uguaglianze, moltiplicando a sinistra per s_π , si ha:

$$\sigma = s_\pi \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \circ s'' \text{ oppure} \\ \sigma = s_\pi \circ s' \circ s'' \circ s'''$$

Pertanto, σ è la composizione di quattro simmetrie planari.

c.v.d.

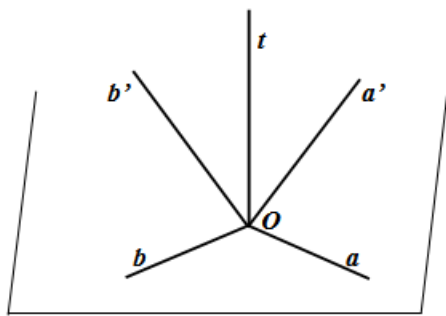
Teorema 5

Il prodotto di due rotazioni con gli assi incidenti è una rotazione con l'asse passante per il punto comune agli assi delle prime due.

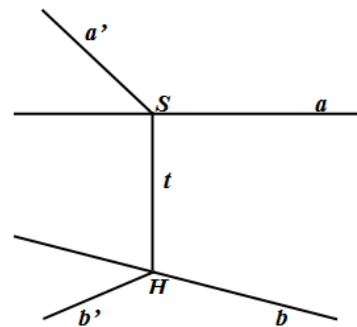
Dim.: se a e b sono gli assi delle due rotazioni (Figura 25), O è il loro punto comune. Considerato il piano contenente gli assi delle due rotazioni, sia t la retta ortogonale in O a tale piano.

Nel piano ortogonale alla retta a nel punto O , consideriamo la retta a' tale che $r_\alpha = s_{a'} \circ s_t$ avendo indicato con $s_{a'}$ e s_t le simmetrie assiali di assi a' e t .

Nel piano ortogonale alla retta b nel punto O , consideriamo la retta b' tale che $r'_\beta = s_t \circ s_{b'}$; si ha allora che:



(Figura 25)



(Figura 26)

$$I = r_\alpha \circ r'_\beta = s_{a'} \circ s_t \circ s_t \circ s_{b'} = s_{a'} \circ s_{b'},$$

da cui si ha che l'isometria I è una rotazione intorno alla retta per O ortogonale al piano di a' e b' .

c.v.d.

Teorema 6

Il prodotto di due rotazioni con gli assi sghembi è una rototraslazione ed in particolare una rotazione o una traslazione.

Dim.: Si può considerare il segmento SH di minima distanza tra le due rette sghembe a e b **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**; si indichi con t tale retta SH .

Se si sceglie sul piano per S ortogonale alla retta a la retta a' tale che $r_\alpha = s_{a'} \circ s_t$ e poi si considera sul piano per H ortogonale alla retta b la retta b' tale che $r'_\beta = s_t \circ s_{b'}$, si ha allora che: $I = s_{a'} \circ s_{b'}$. Per quanto visto, questa in generale è una rototraslazione ed in particolare una rotazione o una traslazione.

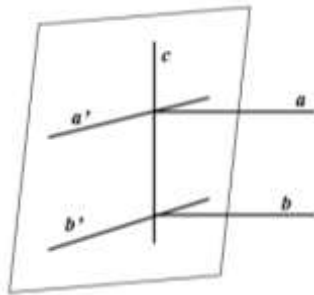
Teorema 7

Il prodotto di due rotazioni con gli assi paralleli è una rotazione se r ed r' non sono simmetrie assiali; è una traslazione se r ed r' sono due simmetrie assiali.

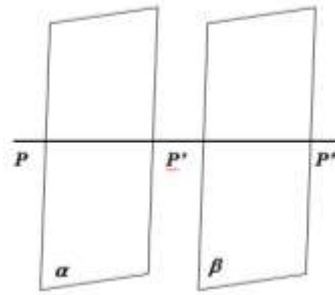
Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Dim.: Se r_α ed r'_β sono due simmetrie assiali, $I = r_\alpha \circ r'_\beta$ è per definizione una traslazione. Se le rotazioni non sono simmetrie, si consideri una retta c ortogonale agli assi di r_α ed r'_β , nel piano ortogonale a tali assi e contenente c , le rette a' e b' tali che $r_\alpha = s_{a'} \circ s_c$ e $r'_\beta = s_c \circ s_{b'}$, da cui $I = s_{a'} \circ s_{b'}$.

Se r_α ed r'_β sono due rotazioni di ampiezza α e β , se $\alpha + \beta = 0$, le rette a' e b' risultano parallele ed I è una traslazione, se invece $\alpha + \beta \neq 0$, le rette a' e b' risultano incidenti ed I è una rotazione **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** *c.v.d.*



(Figura 27)



(Figura 28)

Osservazione.

Il prodotto di due rotazioni con lo stesso asse è una rotazione con quest'asse.

2.4 Composizioni di isometrie inverse

Consideriamo ora le *isometrie inverse* dello spazio: una di queste è la simmetria planare. Il teorema fondamentale (*pag. 17*) permette di classificare tutte le isometrie dello spazio (Morelli 1989).

Si possono, infatti, dimostrare i seguenti teoremi:

Teorema 1

Il prodotto di due simmetrie planari con i piani di simmetria paralleli è la traslazione, il cui modulo è il vettore perpendicolare a questi piani con il verso che va dal primo al secondo di essi e di lunghezza doppia della distanza tra essi.

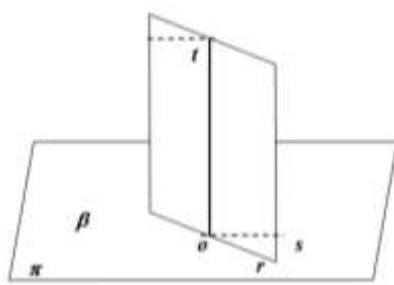
Dim.: Se s_α e s_β sono le simmetrie rispetto ai piani α e β , i segmenti PP' e $P'P''$ **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** sono entrambi perpendicolari alla giacitura individuata da α e β . Poiché tali segmenti sono consecutivi e paralleli, allora risultano anche adiacenti ed allineati. Pertanto il punto P è trasformato nel punto P'' da $s_\alpha \circ s_\beta$, mediante lo spostamento individuato dal segmento orientato PP'' che definisce la trasformazione come traslazione avente per modulo il vettore $\overrightarrow{PP''}$.

Teorema 2

Il prodotto di due simmetrie planari con i piani di simmetria incidenti è la rotazione avente per asse la retta comune a questi due piani ed ampiezza doppia dell'angolo formato da essi.

Dim.: siano α e β due piani incidenti e sia t la loro retta di intersezione (Figura 29).

Se s_α è la simmetria dello spazio rispetto al piano α ed s_β è la simmetria dello spazio rispetto al piano β , il prodotto $s_\alpha \circ s_\beta$ presenta le seguenti caratteristiche:



(Figura 29)

- 1) $s_\alpha \circ s_\beta$ è un'isometria in quanto prodotto di due isometrie;
- 2) la retta $t \equiv \alpha \cap \beta$ è una retta di punti uniti in $s_\alpha \circ s_\beta$;
- 3) ogni piano π perpendicolare a t è unito in tale isometria, in quanto unito in ciascuna delle due simmetrie.

Proprio quest'ultima considerazione ci permette di asserire che per dimostrare l'asserto basta dimostrare che su ogni piano π perpendicolare a t , l'isometria $s_\alpha \circ s_\beta$ subordina una rotazione. A tale scopo siano r ed s le tracce di α e β su π (ovvero le rette di intersezione rispettivamente di α con π e di β con π); la simmetria s_α induce su π la simmetria rispetto ad r , e la s_β induce su π la simmetria rispetto ad s . Ma, dallo studio delle trasformazioni nel piano, sappiamo che il prodotto di due simmetrie è una rotazione ρ di centro $O \equiv t \cap \pi$ (ovviamente è anche $O \equiv r \cap s$) ed ampiezza δ uguale al doppio dell'ampiezza dell'angolo orientato (acuto o retto) formato da una semiretta di r e da una semiretta di s tale che $r\hat{O}s \leq \frac{\pi}{2}$.

Pertanto il prodotto $s_\alpha \circ s_\beta$ è una rotazione dello spazio che ha uniti tutti i punti della retta t ed ha per ampiezza $\delta = 2 \varepsilon$, cioè il doppio dell'angolo ε individuato dalla sezione normale del diedro $\alpha \hat{t} \beta$ e tale che $\varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Notiamo che, nel caso in cui i due piani sono perpendicolari tra di loro, il prodotto è una simmetria assiale avente per asse la retta di intersezione dei due piani.

Teorema 3

Il prodotto di quattro simmetrie planari quando non è una traslazione o una rotazione, allora risulta essere una rototraslazione.

Dim.: siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quattro piani e $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ e s_δ le simmetrie planari rispetto a tali piani. Se consideriamo il prodotto di queste quattro simmetrie planari $s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha$ si verificano i seguenti casi:

- 1) se i primi due piani di simmetria sono paralleli, e così come anche gli altri due, si ha:

$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = t_2 \circ t_1$$

è una traslazione, essendo il prodotto di due traslazioni di moduli rispettivamente a e b ancora una traslazione avente per modulo la somma dei moduli $a+b$;

- 2) se i primi due piani di simmetria sono incidenti, e così anche gli altri due, si ha:

$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = r_2 \circ r_1$$

come si è visto il prodotto di due rotazioni con gli assi incidenti è una rotazione; se gli assi sono paralleli si ha una traslazione o una rotazione a seconda che gli angoli hanno una somma $\equiv 0 \pmod{2\pi}$, oppure no; se gli assi sono sghembi si ha una rototraslazione;

- 3) se i primi due piani di simmetria sono incidenti e gli altri due paralleli, si ha:

$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = r \circ t$$

è una rototraslazione essendo il prodotto di una rotazione intorno ad una retta r per una traslazione;

- 4) se i primi due piani di simmetria sono paralleli e gli altri due incidenti, si ha:

$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = t \circ r$$

è una rototraslazione essendo il prodotto di una traslazione per una rotazione di asse una retta r .
c.v.d.

Teorema 4

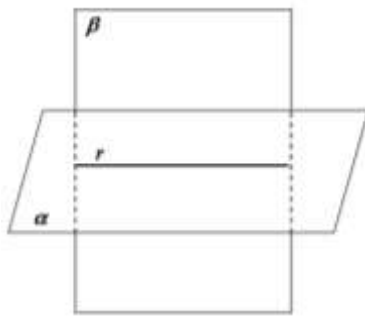
Il prodotto di una simmetria planare per una simmetria assiale avente l'asse appartenente al piano della simmetria planare è la simmetria planare rispetto al piano per l'asse della simmetria assiale perpendicolare al piano della simmetria planare.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della simmetria assiale, appartenente al piano α ; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed s_r la simmetria assiale di asse la retta r .

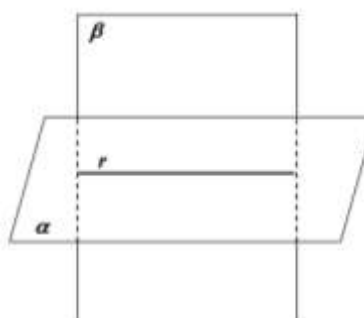
Abbiamo visto che una simmetria assiale di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari in cui i piani di simmetria sono perpendicolari tra loro ed avente per intersezione r ; possiamo considerare uno di questi piani coincidenti con α , e sia β il piano perpendicolare ad α ; si ha:

$$s_r \circ s_\alpha = (s_\beta \circ s_\alpha) \circ s_\alpha = s_\beta \circ (s_\alpha \circ s_\alpha) = s_\beta \circ I = s_\beta$$

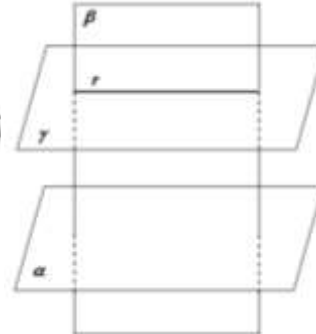
dove s_β è la simmetria planare rispetto al piano β perpendicolare al piano α .
c.v.d.



(Figura 30)



(Figura 31)



(Figura 32)

Teorema 4'

Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione avente l'asse appartenente al piano della simmetria planare è la simmetria planare rispetto al piano per l'asse della rotazione perpendicolare al piano della simmetria planare.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della rotazione, appartenente al piano α ; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed ρ_φ la rotazione di asse la retta r **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..**

Abbiamo visto che una rotazione di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con i piani di simmetria incidenti nella retta r e tali che l'angolo diedro che essi formano ha le sezioni normali di ampiezza uguale alla metà dell'ampiezza di rotazione;

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

possiamo considerare uno di questi piani coincidenti con α , e sia β il piano che forma con α un angolo di ampiezza $\frac{\varphi}{2}$ uguale alla metà dell'ampiezza di rotazione; si ha:

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = (s_\beta \circ s_\alpha) \circ s_\alpha = s_\beta \circ (s_\alpha \circ s_\alpha) = s_\beta \circ I = s_\beta$$

dove s_β è la simmetria planare rispetto al piano β perpendicolare al piano α . c.v.d.

Teorema 5

Il prodotto di una simmetria planare per una simmetria assiale avente l'asse parallelo al piano della simmetria planare è una antitraslazione.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della simmetria assiale, parallelo al piano α ; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed s_r la simmetria assiale di asse la retta r .

Abbiamo visto che una simmetria assiale di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ perpendicolari tra loro ed aventi intersezione r ; possiamo considerare uno di questi piani ad es. β perpendicolare ad α , e l'altro piano γ parallelo ad α ; si ha:

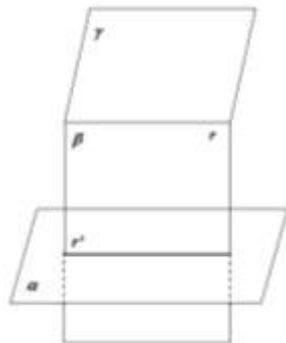
$$s_r \circ s_\alpha = (s_r \circ s_\beta) \circ s_\alpha = (s_\beta \circ s_\gamma) \circ s_\alpha = s_\beta \circ (s_\gamma \circ s_\alpha) = s_\beta \circ t_\alpha$$

Il prodotto $s_\beta \circ t_\alpha$ è una antitraslazione, in quanto prodotto di una simmetria planare rispetto al piano β con una traslazione avente la direzione parallela al piano β . c.v.d.

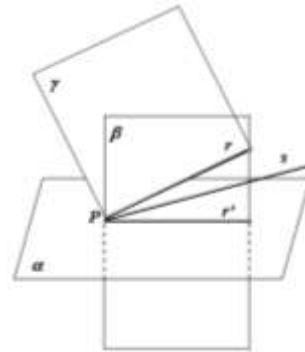
Teorema 5'

Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione avente l'asse parallelo al piano della simmetria planare è una antitraslazione.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della rotazione, parallelo al piano α ; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed ρ_φ la rotazione di asse la retta r

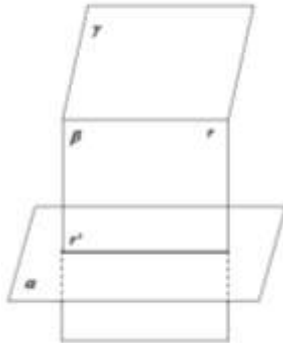


(Figura 33)

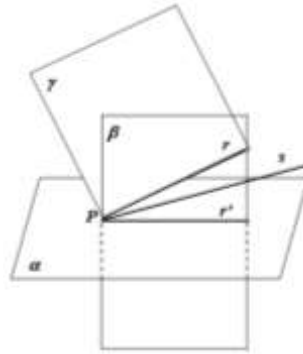


(Figura 34)

Abbiamo visto che una rotazione di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ incidenti nella retta r e tali che l'angolo diedro che essi formano ha le sezioni normali di ampiezza uguale alla metà dell'ampiezza di rotazione; possiamo considerare uno di questi piani β perpendicolare ad α , e sia r' la retta di intersezione di α e β .



(Figura 33)



(Figura 34)

Indicata con $s_{r'}$ la simmetria assiale di asse la retta r' , si ha:

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = (s_r \circ s_\beta) \circ s_\alpha = s_\gamma \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = s_\gamma \circ s_{r'}$$

Facendo ruotare i piani α e β intorno alla retta r' si ottengono i piani β' parallelo a γ ed α' perpendicolare a γ , in modo tale che risulta β' perpendicolare ad α' .

Allora la simmetria $s_{r'}$ si può decomporre nel prodotto $s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}$; pertanto si ha:

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = s_\gamma \circ s_{r'} = s_\gamma \circ (s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}) \circ s_\alpha = s_\gamma \circ (s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}) = (s_\gamma \circ s_{\beta'}) \circ s_{\alpha'} = t_\alpha \circ s_{\alpha'}$$

Il prodotto $t_\alpha \circ s_{\alpha'}$ è una antitraslazione, in quanto prodotto di una simmetria planare rispetto al piano α' con una traslazione avente la direzione parallela al piano α' . *c.v.d.*

Teorema 6:

Il prodotto di una simmetria planare per una simmetria assiale avente l'asse incidente il piano della simmetria planare è una antirotazione.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della simmetria assiale incidente il piano α in P; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed s_r la simmetria assiale di asse la retta r .

Abbiamo visto che una simmetria assiale di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ perpendicolari tra loro ed aventi per

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

intersezione la retta r ; possiamo considerare uno di questi piani β perpendicolare ad α , e sia r' la retta di intersezione di α e β .

Indicata con $s_{r'}$ la simmetria assiale di asse la retta r' , si ha:

$$s_r \circ s_\alpha = (s_\gamma \circ s_\beta) \circ s_\alpha = s_\gamma \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = s_\gamma \circ (s_\alpha \circ s_\beta) = s_\gamma \circ s_{r'}$$

Facendo ruotare i piani α e β intorno alla retta r' , detta s la retta per P perpendicolare al piano γ , risulterà che il piano α ruotando intorno alla retta r' , passerà per s , quando diventerà $\alpha' = r' s$. Allora α' è perpendicolare a γ ; ma anche il piano β ruota intorno alla retta r' , restando β' perpendicolare ad α' , dove β' è la nuova posizione.

Allora la simmetria $s_{r'}$ si può decomporre nel prodotto $s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}$; pertanto si ha:

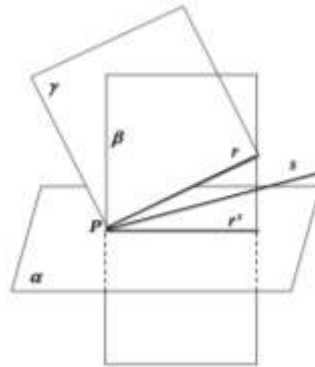
$$s_r \circ s_\alpha = s_\gamma \circ s_{r'} = s_\gamma \circ (s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}) = s_\gamma \circ (s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}) = (s_\gamma \circ s_{\beta'}) \circ s_{\alpha'} = \rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$$

Il prodotto $\rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$ è una antirotazione, in quanto prodotto di una simmetria planare per una rotazione intorno ad una retta perpendicolare al piano della simmetria planare.

c.v.d.

Teorema 6'

Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione avente l'asse incidente il piano della simmetria planare è una antirotazione.



(Figura 35)

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della rotazione incidente il piano α in P ; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α e ρ_φ la rotazione di asse la retta r .

Abbiamo visto che una rotazione di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ incidenti nella retta r e tali che l'angolo diedro che essi formano ha le sezioni normali di ampiezza uguale alla metà dell'ampiezza di rotazione; possiamo considerare uno di questi piani β perpendicolare ad α , e sia r' la retta di intersezione di α e β .

Indicata con $s_{r'}$ la simmetria assiale di asse la retta r' , si ha:

Ferdinando Casolaro, Luca Cirillo, Raffaele Prosperi

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = (s_\gamma \circ s_\beta) \circ s_\alpha = s_\gamma \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = s_\gamma \circ (s_\alpha \circ s_\beta) = s_\gamma \circ s_{r'}$$

Facendo ruotare i piani α e β intorno alla retta r' , detta s la retta per P perpendicolare al piano γ , risulterà che il piano α ruotando intorno alla retta r' , passerà per s , quando diventerà $\alpha' = r' s$. Allora α' è perpendicolare a γ ; ma anche il piano β ruota intorno alla retta r' , restando β' perpendicolare ad α' , dove β' è la nuova posizione.

Allora la simmetria $s_{r'}$ si può decomporre nel prodotto $s_{\alpha\beta} \circ s_{\beta'}$; pertanto si ha:

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = s_\gamma \circ s_{r'} = s_\gamma \circ (s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}) = s_\gamma \circ (s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}) = (s_\gamma \circ s_{\beta'}) \circ s_{\alpha'} = \rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$$

Il prodotto $\rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$ è una antirotazione, in quanto prodotto di una simmetria planare per una rotazione intorno ad una retta perpendicolare al piano della simmetria planare.

c.v.d.

Teorema 7

Il prodotto di tre simmetrie planari, se non è una antitraslazione oppure una antirotazione, è una simmetria planare.

Dim.: siano α, β, γ tre piani e s_α, s_β e s_γ le simmetrie planari rispetto a tali piani. Considerando il prodotto di queste tre simmetrie planari $s_\alpha \circ s_\beta \circ s_\gamma$ si verificano i seguenti casi:

- 1) Se i tre piani sono paralleli, allora dal prodotto si ottiene una simmetria planare.
- 2) Se i tre piani passano per una stessa retta, allora dal prodotto si ottiene una simmetria planare.
- 3) Se due dei tre piani si intersecano in una retta parallela al terzo piano, allora dal prodotto si ottiene una antitraslazione.
- 4) Se due dei tre piani si intersecano in una retta incidente il terzo piano, allora dal prodotto si ottiene una antirotazione.

c.v.d.

Vediamo ora altre composizioni di isometrie inverse.

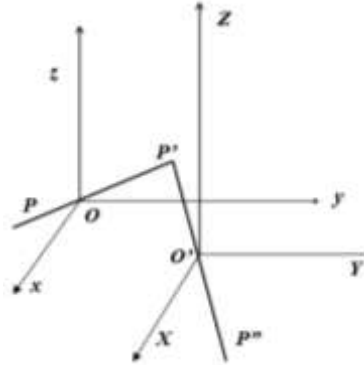
Teorema 8:

Il prodotto di due simmetrie centrali è una traslazione che ha per modulo il vettore $\overrightarrow{OO'}$, dove O ed O' sono i due centri di simmetria.

Dim.: Di tale proprietà si fornisce una giustificazione analitica.

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Sia s_o la simmetria di centro O che porta il punto $P(x, y, z)$ nel punto $P'(x', y', z')$ **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..**



(Figura 36)

Se $Oxyz$ è un riferimento cartesiano con origine in O e se (h, k, l) sono le coordinate del punto O' in tale riferimento, consideriamo il cambiamento di riferimento che porta $Oxyz$ in $O'XYZ$, dove X, Y, Z , sono le parallele per O' agli assi x, y, z , le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} X = x - h \\ Y = y - k \\ Z = z - l \end{cases} \quad \begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \\ z = Z + l \end{cases} \quad (1)$$

Le equazioni della simmetria s_o che porta $P(x, y, z)$ in $P'(x', y', z')$ sono:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

Pertanto, il punto P' avrà nel nuovo riferimento di origine O' le seguenti coordinate:

$$\begin{cases} X = -x' - h \\ Y = -y' - k \\ Z = -z' - l \end{cases}$$

Di conseguenza, la simmetria assiale $s_{o'}$ rispetto ad O' che porta $P'(X, Y, Z)$ nel punto $P''(X', Y', Z')$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -X \\ y' = -Y \\ z' = -Z \end{cases}$$

Ferdinando Casolaro, Luca Cirillo, Raffaele Prosperi

da cui, se (x'', y'', z'') sono le coordinate di P'' nel riferimento $Oxyz$, si ha:

$$\begin{cases} x'' = X' + h \\ y'' = Y' + k \\ z'' = Z' + l \end{cases}$$

Combinando queste ultime due equazioni risulta:

$$\begin{cases} x'' = -X + h \\ y'' = -Y + k \\ z'' = -Z + l \end{cases}$$

Pertanto, tenuto conto delle equazioni (1) si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x'' = x + 2h \\ y'' = y + 2k \\ z'' = z + 2l \end{cases}$$

che individuano la traslazione che ha per modulo il vettore $(2h, 2k, 2l)$.

3 Conclusioni

L'Universo geometrico è tridimensionale, per cui le Trasformazioni che avvengono in esso sono generate nello spazio. La rappresentazione nel piano serve principalmente ad evidenziarne le caratteristiche.

La base dei metodi di rappresentazione è la Prospettiva (dal latino *perspectiva optica*) che è universalmente considerata anche il fondamento teorico dell'Arte pittorica (Casolaro, Paladino, 2012). La rappresentazione dei dettagli tecnici della figura avviene con i metodi della *Geometria descrittiva* (Loria, 1921). E' compito, invece, della *Geometria proiettiva* la rappresentazione mediante le *trasformazioni* che essa subisce con le operazioni di *proiezione* e *sezione* (Casolaro, 2003). In bibliografia abbiamo anche citato (Casolaro, Eugeni, 1996) un lavoro che evidenzia le interrelazioni, anche di carattere metrico, del fusionismo tra geometria piana e geometria dello spazio con particolare riferimento alle Trasformazioni che conservano la norma.

Riteniamo allora, che per un'analisi corretta dei fenomeni fisici che si manifestano nell'universo, sia essenziale la conoscenza delle reali Trasformazioni che in esso avvengono.

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Purtroppo, anche nell'insegnamento ci si limita al solo studio delle Trasformazioni nel piano, sicuramente significativo e interessante anche dal punto di vista didattico, ma pensiamo che per una formazione completa non si può ignorare la conoscenza delle tematiche affrontate in questo lavoro.

Bibliografia

Casolaro, F. and Eugeni, F. (1996). "Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebra reali doppie". *Ratio Matematica* n. 1, 1996.

Casolaro, F. and Cirillo, L. (1996). "Le Trasformazioni omologiche. Atti Convegno Nazionale Mathesis". *I fondamenti della matematica per la sua didattica*. Verona, novembre 1996.

Casolaro, F. (2002). "Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo". *Atti del Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo"*. Bergamo 2002.

Casolaro, F. (2003). "Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica". *Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio"*. Vasto, 10-12 aprile 2003, 129-148.

Casolaro, F. and Pisano, R. (2011). "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)". *History Research*, Vol. 1, Number 1, December 2011.

Casolaro, F. and Prospero, R. (2011). "La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica". *Atti della "Scuola estiva Mathesis"* 26-30 luglio 2011. Terni: Editore 2C Contact.

Casolaro, F. and Paladino L. (2012). "Evolution of the geometry through the Arts". 11th International Conference APLIMAT 2012 in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Technology in Bratislava, febbraio 2012.

Casolaro, F. (2014). "L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?". "Science&Philosophy Journal of Epistemology", Volume 2, Numero 1, 2014.

Cundari, C. (1992). "Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie". Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e

Ferdinando Casolaro, Luca Cirillo, Raffaele Prosperi

Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma, 11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991.

Loria, G. (1921). Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai giorni nostri. Milano: Ulrico Hoepli.

Morelli, A. (1989). Geometria per il biennio delle scuole medie superiori. Napoli: Edizione Loffredo.

Bourdieu sociologue de Flaubert

Fernando Cipriani

Professeur de langue et littérature françaises
fercip2002@yahoo.it

Résumé

Les règles de l'art, écrites dix ans avant la mort de Pierre Bourdieu (2002), occupent une place importante dans la production du sociologue français, qui inscrit le rôle social de l'artiste, de l'écrivain en particulier, dans un "champ" conflictuel, qui peut être défini comme un ordre imposé par des forces sociales extérieures, politiques surtout, que la commercialisation impose sur le marché. Il s'agit surtout de comprendre pour le sociologue la genèse sociale du champ littéraire, tout en reconnaissant un jeu de complicité entre auteur et lecteur et tout en passant de l'autoanalyse à la socioanalyse.

Au-delà de l'idée fondamentale dans la sociologie de Bourdieu centrée sur la lutte entre dominants et dominés, Bourdieu essaye de définir dans ce livre une vraie science rigoureuse de l'œuvre d'art, que nous allons résumer, tenant compte des conventions sociopolitiques qui sont à la base de la réception de l'œuvre littéraire, dans un contexte politique et historique précis, qui tient compte surtout de la période entre la révolution 1848 et le coup d'État de Napoléon (1852), tout en suivant les débats sur l'école réaliste et les procès que Flaubert et Baudelaire doivent subir comme deux défenseurs de l'autonomie de l'art .

Mots-Clés: sociologie de l'art et de la littérature. Le champ littéraire ; l'indétermination, le monde des relations sociales. L'Éducation sentimentale. Les protagonistes. Baudelaire et Flaubert contraires à la vision bourgeoise de l'art. L'invention de l'intellectuel.

1. L'Éducation sentimentale ou les fondements d'une lecture sociologique

Avant tout Bourdieu dans l'Avant-propos refuse tout discours apologétique, tout culte aveugle de l'œuvre d'art, surtout il refuse de voir dans l'œuvre «l'essence sublimée de l'universel» (p. 16), à son avis le sociologue doit pour cela «rompre avec l'idéalisme de l'hagiographie littéraire» (p. 14), «répudier la pompe prophétique de la grande critique d'auteur et le ronron sacerdotal de la tradition scolaire» (ibidem), abandonner toute lecture «créatrice», l'expérience de l'ineffable, mais aussi «l'arrogance scientiste» (p. 12).

L'attention du sociologue doit au contraire se concentrer sur le monde social dans lequel le texte a été produit et son analyse scientifique doit viser «les conditions sociales de la production et de la réception de l'œuvre d'art» (p. 15) et dans le cas de *L'Éducation sentimentale* de Flaubert, il doit reconstruire «l'espace dans lequel l'auteur se trouve englobé et compris comme un point», que Bourdieu précise comme «un point de vue singulier sur cet espace». L'écrivain fait apparaître à côté de l'analyse scientifique cet «amour sensible de l'œuvre» conçu comme «assimilation de l'objet au sujet et immersion du sujet» (ibidem).

Pour atteindre finalement et «comprendre la genèse sociale du champ littéraire, de la croyance qui le soutient, du jeu de langage qui s'y joue, des intérêts et des enjeux matériels ou symboliques qui s'y engendrent» le sociologue doit «regarder les choses en face et les voir comme elles sont» (p. 16).

Dans la conclusion de l'analyse Bourdieu précise encore mieux les structures sociales et les structures mentales qui ensemble conditionnent la production de *L'Éducation sentimentale*: le roman «restitue d'une manière extraordinairement exacte la structure du monde social dans laquelle elle a été produite et même les structures mentales qui, façonnées par ces structures sociales, sont le principe générateur de l'œuvre dans laquelle ces structures se révèlent (p. 68).

Le discours du sociologue devient scientifique surtout quand il établit les règles qui conduisent l'écrivain, l'artiste à produire l'œuvre, respectant «l'ensemble des questions posées dans le champ», pour «jouer les ressources inscrites dans l'espace des possibles qui (...) s'offre à chacun des écrivains comme un univers infini de combinaisons possibles enfermées à l'état potentiel dans un système fini de contraintes» (p.170).

La théorie du champ devient ainsi l'idée fondamentale de la sociologie bourdieusienne, son apport au renouvellement des études littéraires est reconnu dans les dernières études. Dans *Les Règles de l'art*, selon Joseph Jurt (2004: 255-276), Bourdieu met en lumière trois périodes historiques: celle du Second

Empire (à laquelle appartient *L'Éducation sentimentale*, plus particulièrement l'espace culturel entre 1830-1850, relativement autonome, ensuite celle des deux dernières décennies du XIX, enfin la dernière concernant le champ littéraire actuel.

Ce qui intéresse le sociologue c'est surtout le procès de l'autonomisation de la littérature de la société qui la produit, même si les écrivains constituent une fraction dominée de la classe dominante. C'est à la littérature qui revient le mérite de rendre la complexité des expériences de la vie.

Mais quel est ce fameux point de vue de Flaubert dans ce roman emblème d'une époque? Celui d'un écrivain qui dans son désenchantement, dénué d'illusions sur le peuple, explique Bourdieu, se refuse «d'accorder au lecteur les satisfactions trompeuses que lui offre le faux humanisme pharisien des vendeurs d'illusions» (p. 191), de même qu'il refuse «la construction pyramidale, c'est-à-dire (...) la convergence ascendante vers une idée, une conviction, une conclusion» (ibidem).

2. Le monde des affaires, de l'art et de la politique dans *L'Éducation sentimentale*

Le roman *L'Éducation sentimentale* se présente, rappelle Bourdieu, comme l'histoire d'un groupe d'adolescents connotée par l'opposition et l'ambivalence relationnelle entre ces adolescents, et plus exactement comme «des histoires de vie», ce qui correspond à «autant d'occasions de manifester l'essence des personnages en la déployant dans le temps sous la forme d'une histoire» (p. 37).

Ce qui nous semble très intéressant du point de vue psychologique et existentiel c'est la définition de l'adolescence que Flaubert, selon l'interprétation de Bourdieu, en donne: «un moment critique, au double sens» (p. 36), donc d'une part «l'entrée dans la vie comme entrée dans l'illusion de réel» (ibidem), tout en prenant la fiction au sérieux, comme le font Frédéric, Emma et Flaubert lui-même, et d'autre part la participation aux jeux/enjeux sociaux.

Bourdieu se tient dans cette analyse du roman au texte, un des mots clés, et à ses structures profondes: il en montre les mécanismes linguistiques, cachés et subtils, par la conciliation de termes opposés apparemment en contradiction: «Pour dévoiler complètement la structure que le texte littéraire ne dévoilait qu'en la voilant, l'analyse doit réduire le récit d'une aventure au protocole d'une sorte de montage expérimental» (p. 69).

Les jeux linguistiques, justifiés et voulus par le sociologue comme un «gai savoir» (p. 14) concernent surtout le dire et le contredire (à propos de cette complicité entre lecteur et auteur et en particulier du « rapport de dénégation de la réalité» exprimé par le texte bourdieusien selon une dialectique de la contradiction ou du contrebalancement, où l'acte de dire est contredit en quelque

sorte, renforcé par la relation que le pronom entretient avec son antécédent, le nom: «Mettant en suspens *la complicité* qui unit l'auteur et le lecteur dans le même rapport de dénégation de réalité exprimée par *le texte*, elle révèle la vérité que *le texte* énonce, mais sur un mode tel qu'*il ne la dit*; en outre elle fait apparaître *a contrario* la vérité du texte lui-même qui, précisément, se définit dans sa spécificité par le fait qu'*il ne dit pas ce qu'il dit comme elle le dit*» (p. 69, les mots dans les citations sont soulignés par Bourdieu).

Parfois le titre du paragraphe pose le problème de la conciliation des termes opposés: « Objectiver le sujet de l'objectivation » (p. 341), c'est-à-dire comment objectiver un point de vue subjectif, ou encore Bourdieu s'explique en utilisant le jeu des oppositions de certains mots appuyées sur les préfixes: routinisation /déroutinisation, automatisation/ désautomatisation, banalisation/débanalisation (p. 340), voir aussi p. 69. Le paradoxe s'alimente du jeu des affirmations contredites, par exemple à propos de la définition de l'art pur jumelé avec l'amour: «Comme l'amour pur est l'art pour l'art de l'amour, l'art pour l'art est l'amour pur de l'art» (p. 55).

La lecture sociologique (nous rappelons que le sous-titre porte *une lecture sociologique*) par cette analyse rompt finalement le charme promis par cet «effet de réel» produit par le texte comme illusion romanesque et dont se nourrit le roman. Pour évoquer ce réel, plus réel que les apparences sensibles, il faut un travail sur la forme, Baudelaire recommandait le même exercice formel d'abolir toute distinction entre la forme et le contenu, le style et le message. Au fond, conclut Bourdieu, c'est le même formalisme réaliste flaubertien (pp. 182-183).

Revenons au rapport des adolescents avec le monde social et avec ses enjeux sociaux, dont le protagoniste Frédéric est «un formidable analyseur» (p. 71). C'est la duplicité, parfois l'ambiguïté, l'ambivalence qui domine ce monde de relations humaines, institutionnalisées, surtout les salons fréquentés par des filles de luxe et même d'art, où elles ont « la fonction de *médiatrices* entre les "bourgeois", dominants tout court, et les artistes, dominants-dominés » (p. 29), un milieu où encore la hiérarchie dominante reste celle de l'argent qui sert à entretenir les relations de cœur.

Le roman se structure autour de deux pôles, celui des affaires et de la politique appartenant aux Dambreuse et celui de l'art et de la politique appartenant aux Arnoux. C'est dans le salon des Dambreuse que trouvent place les hommes et les femmes d'affaires et d'où sont exclus les artistes et les journalistes; Bourdieu nous donne un schéma du «champ du pouvoir d'après *l'Éducation sentimentale*» (pp. 24-25) et une liste des invités habituels et occasionnels surtout dans les deux salons, sans oublier les boissons, les soirées, les réunions, les dîners, organisés selon la pratique sociale de la «cooptation».

A l'opposé du salon des Dambreuse se place un tout autre espace social qui est marqué par un autre personnage, ou mieux encore pour reprendre les

termes bourdieusiens, par le symbole d'une autre position sociale; une «dualité plus profonde que toutes les duplicités» se retrouve en effet chez le marchand de tableaux, M. Arnoux, un être double, qui passe pour un révolutionnaire, tout en restant «un représentant de l'argent et des affaires au sein de l'univers de l'art» (p. 27); en réalité il exploite le travail des artistes par la consécration promise, la gloire, «en dissimulant la vérité, c'est-à-dire l'exploitation, par un double jeu permanent entre l'art et l'argent». Chez ce marchand industriel (le journal qu'il soutient s'appelle *L'Art industriel*) se retrouvent «les avantages de deux logiques antithétiques, celle de l'art désintéressé, qui ne connaît de profits que symboliques, et celle du commerce» (p. 28).

Tout un système d'opposition des femmes détermine ce qui caractérise l'aspect fondamental de la personnalité du protagoniste, Frédéric: l'indécision et l'indétermination. Il est possible d'avancer, selon Bourdieu, l'hypothèse d'une autobiographie spirituelle de l'auteur grâce à la structure de l'espace social partagée soit par Frédéric et soit par Flaubert, qui devient «socioanalyste de Flaubert» écrivain (p. 20).

Le jeune adolescent à l'égard de son héritage est défini par le sociologue «un être indéterminé, ou, mieux, déterminé à l'indétermination, objective et subjective» (p. 21); ce qui veut dire la double possibilité offerte à lui de maintenir ou d'augmenter son patrimoine, hérité après la mort de son père. Le jeune adolescent renonce à son état et à une épouse dotée de rentes (ce qui voudrait sa mère). Il ne se prend pas au sérieux, il «déréalise le sérieux», au contraire de son compagnon Martinon, qui représente la détermination et que Bourdieu voit comme «le bourgeois conquérant» (p. 33).

Le sociologue analyse donc les raisons de l'indétermination de Frédéric pour arriver à formuler les règles sociologiques qui empêchent à l'héritier de prendre des décisions résolutes du conflit; il explique en des termes empruntés à la physique (que nous allons mettre en évidence) sa prédisposition à l'indétermination par ce jeu de forces extérieures dans un moment critique de sa vie de jeune adolescent, sans cette volonté de «participation aux jeux sérieux dont est fait le monde social» (p. 36):

Bourgeois en sursis et intellectuel provisoire, obligé d'adopter ou de mimer pour un temps les poses de l'intellectuel, il est prédisposé à l'indétermination par cette double détermination contradictoire: placé au centre d'un *champ de forces* qui doit sa structure à l'opposition entre *le pôle* du pouvoir économique ou politique et *le pôle* du prestige intellectuel ou artistique (dont *la force d'attraction* reçoit un renforcement de la logique propre du milieu étudiant), il se situe dans une zone d'*apesanteur* sociale où *se compensent et s'équilibrent* provisoirement *les forces* qui l'emporteront dans l'une ou l'autre direction (p. 35-36).

3. Deux jeunes ratés: Frédéric et Deslauriers

Il apparaît évident que le concept de « champ » devient déterminant dans la théorie sociologique de Bourdieu pour qui l'action sociale de l'individu est soumise aux enjeux sociaux, qu'imposent les intérêts économiques à la classe d'appartenance de chaque individu. Le champ devient alors une «histoire objectivée» (Paolucci 2011: 48-57). Bourdieu souligne dans un passage de *L'Éducation sentimentale* le point de vue d'un jeune adolescent petit-bourgeois attiré par le monde du pouvoir et neutraliser par celui du narrateur: «*N'ayant jamais vu le monde qu'à travers la fièvre de ses convoitises, il se l'imaginait comme une création artificielle, fonctionnant en vertu des lois mathématiques. Un dîner en ville, la rencontre d'un homme en place, le sourire d'une jolie femme pouvaient, par une série d'actions se déduisant les unes des autres, avoir de gigantesques résultats. Certains salons parisiens étaient comme ces machines qui prennent la matière à l'état brut et la rendent centuplée de valeur. Il croyait aux courtisanes conseillant les diplomates, aux riches mariages obtenus par les intrigues, au génie des galériens, aux docilités du hasard sous la main des forts*» (p. 44).

Nous ne nous attarderons pas à suivre l'analyse du sociologue sur les sentiments que Frédéric et Deslauriers éprouvent l'un pour l'autre (leurs différents points de vue alimentent alternativement la jalousie, la sympathie, la possession, le ressentiment, les ambitions, la passion pour l'argent, donc une vision différente sur le monde social). Mais cette relation que plus d'un critique a interprétée comme homosexuelle, entre les deux amis obéit, explique Bourdieu, à un principe politique, qui est «la relation entre la bourgeoisie et la petite bourgeoisie» (p. 41). Faudra-t-il penser que toutes les mésententes entre les deux amis sont dues au conflits des deux classes d'appartenance tout proches?

Il reste que ces deux amis sont des jeunes ratés: Deslauriers finit par devenir l'animateur d'un cercle réactionnaire et Frédéric, pris dans l'engrenage d'ambitions contradictoires, en refusant toutes les possibilités qui lui sont offertes prolonge son état d'indétermination. «Être double», «voué au quiproquo ou au chassé-croisé», est aussi voué à une «existence double»; notre héros ne peut que «différer, pour un temps, les déterminations» (p. 49) et essayer de concilier les contraires, comme l'amour noble de Mme Dambreuse et l'amour folâtre de Rosanette et en politique sa candidature, terminé en échec, soutenus par deux partis opposés, l'un de droite et l'autre de gauche.

Bourdieu ne manque pas l'occasion de montrer comment les deux incompatibilités non seulement entre l'amour pur et l'amour mercenaire mais aussi entre l'art et l'argent déterminent une coexistence équivoque et le vieillissement social: voilà que nous passons de l'indétermination de Frédéric au

déterminisme, que Bourdieu justifie comme «la nécessité structurale du champ» (ibidem).

Dans le paragraphe titré «Les accidents nécessaires» Bourdieu continue à nous montrer les lois qui règlent le jeu du pouvoir dans le monde des affaires et la correspondance que Flaubert établit entre les formes de l'amour de l'art d'une part (et qui justifie en partie l'homologie entre celles-ci et les formes de l'amour) et les balancements de Frédéric entre l'amour fou et les amours mercenaires, représentés par Mme Arnoux, Rosanette et Mme Dambreuse, trois femmes qui symbolisent «un système de possibles, chacune d'elles se définissant par opposition aux deux autres» (p. 52). Le dernier des accidents nécessaires fondés sur les «doubles jeux» et les contraintes, arrive au moment de la vente aux enchères du coffret (ce qui rappelle bien, remarque Bourdieu le thème des trois coffrets étudié par Freud): un moment culminant de l'histoire qui représente non seulement la confrontation entre les trois femmes mais aussi la confrontation de Frédéric avec les trois femmes.

Ce qui nous semble très intéressant dans le chapitre «Flaubert analyste de Flaubert» ce sont les réflexions que Bourdieu manifeste à propos de l'écriture, un procédé qui le voit engagé à montrer, sur la base non seulement des études sur le roman mais aussi de la Correspondance de Flaubert et des passages du roman, ce que nous appelons les ficelles du métier de l'écrivain en tant que romancier et auteur.

Bourdieu précise avant tout que la tentation autobiographique n'a aucun vrai fondement, au contraire en écrivant le roman Flaubert dépasse l'indétermination de Frédéric, puisqu'il entreprend «une entreprise d'*objectivation de soi*, d'autoanalyse, de socioanalyse» (p. 61). Cette objectivation qui est l'un des attributs du «spectateur souverain, affranchi de la dépendance et du travail», enfin de «l'observateur pur» (p. 61) qui veut s'arracher à toutes les déterminations, pour vivre finalement la condition de l'intellectuel, pour se moquer, comme Frédéric, des affaires, se révolter contre le bourgeois, «prendre ses distances par rapport à lui», comme réponse au bourgeois qui le tient à distance.

A l'indétermination passive de Frédéric s'oppose donc «l'indétermination active» de l'écrivain, de l'auteur (on peut vivre effectivement cette indétermination grâce à la création littéraire) en un mot de son «créateur», Flaubert. Seulement l'écriture possède cette faculté d'abolir les «déterminations, les contraintes et limites qui sont constitutives de l'existence sociale» (p.60). Mais attention! ce n'est pas l'épanchement romantique puisque «il y a un abîme entre l'objectivation de Flaubert qui s'opère dans *L'Éducation* et la projection subjective de Frédéric» (p. 175).

Si Flaubert ressemble à Frédéric c'est à cause de cette «impuissance d'un être manipulé par les forces du champ» que Flaubert surmonte par l'écriture: «cela dans l'œuvre où il surmontait cette impuissance en évoquant l'aventure de

Frédéric, et, à travers elle, la vérité objective du champ dans lequel il écrivait cette histoire et qui par le conflit de ses pouvoirs concurrents, aurait pu le réduire, comme Frédéric, à l'impuissance» (p. 178).

Bourdieu en concluant son analyse sur l'écriture flaubertienne ne peut manquer de souligner les traits stylistiques du romancier: le goût pour les symétries et les antithèses («antithèses entre choses parallèles et parallèles entre choses antithétiques», p. 64), la construction des couples de personnages antithétiques, l'utilisation de ses carnets pour les scénarios, l'écart entre le point de vue des personnages et celui du narrateur, l'entrelacement des trois styles en fonction du discours (direct, indirect, indirect libre), l'usage particulier de certains temps (de l'imparfait et du passé simple relevés par Proust), le recours à des blancs, enfin la vision du champ du pouvoir dans *L'Éducation sentimentale*, que l'on pourrait définir «sociologique», ou encore comme l'art de «donner à voir et à sentir», pour «produire un effet de croyance» (p. 68). Ce qui semble bien pousser Bourdieu à réhabiliter l'œuvre littéraire qui «peut parfois dire plus, même sur le monde social, que nombre d'écrits à prétention scientifique» (ibidem). Bourdieu reconnaît le jeu de complicité entre auteur et lecteur, un jeu qui correspond à la simulation et à la dissimulation, au voilement et au dévoilement, à dire et en même temps à ne pas dire la vérité. Le seul risque de la lecture sociologique (et donc de l'analyse scientifique) est l'abolition de l'illusion romanesque, et donc de toute frontière entre la réalité et la fiction, de la rupture du charme de cet «effet de réel», créée par la distance entre la fiction et la réalité. C'est le fondement du bovarysme interprété par notre sociologue comme «l'impuissance à prendre au sérieux le réel, c'est-à-dire les enjeux des jeux dits sérieux» (p. 71).

4. La vision de l'art réaliste et bourgeois selon Flaubert et Baudelaire

C'est dans le chapitre titré «La conquête de l'autonomie» que Bourdieu revient sur les questions politiques et économiques posées aux écrivains et aux artistes en général vers la moitié du XIX siècle, en particulier avant la révolution de 1848 et après le coup d'Etat de Napoléon III (1852), dans un moment décisif où Baudelaire et Flaubert, défenseurs de l'indépendance de l'art, entrent dans les débats qui opposent non seulement les différentes écoles mais aussi plusieurs domaines et secteurs de la vie publique. Bourdieu reconnaît à Baudelaire le mérite d'avoir incarné la position la plus extrême de l'avant-garde artistique, en marquant dès 1840 la distance à l'égard de la bohème réaliste et des ambitions réalistes de son ami Champfleury, jusqu'à réhabiliter l'artiste maudit, les déshérités (le bohème, le saltimbanque, la servante au grand cœur et on peut

ajouter quiconque a perdu son bien, les orphelins, voir à ce propos «Le Cygne» dans «Les Tableaux parisiens»).

L'intérêt de Bourdieu pour l'auteur des *Fleurs du Mal* s'explique surtout en fonction d'«une définition extrêmement réaliste, et prémonitoire, de ce que sera le champ littéraire» (p. 115). Pour publier ce recueil de poésies il ne choisit pas de grands éditeurs, Michel Lévy, comme le fera Flaubert, mais un petit éditeur Poulet-Malassis, qui fut condamné pour avoir publié *Les Fleurs du mal*. L'aversion pour les compromis avec les éditeurs et pour les valeurs bourgeoises dominantes dans la presse et dans le théâtre bourgeois est si répandue et si généralisée qu'il serait impossible à la sociologie de la littérature de reconnaître la valeur à toute institution littéraire nivelant les auteurs, sans pourtant vouloir créer une hiérarchie de valeurs. Le manque de critères artistiques dans les cénacles et les brasseries rend impossible de savoir de quel côté se classent les écrivains frondeurs et de connaître leur position politique. Dans ce cas il devient plus facile pour le pouvoir établi de condamner dans le procès de Flaubert la peinture réaliste contenue dans le roman, et toujours en invoquant la morale, Baudelaire subit la condamnation des *Fleurs du Mal* pour les représentations réalistes et grossières contenues dans le recueil. On sait que Flaubert a horreur des prédications sociales et que son regard neutre ou scientifique lui permet d'écrire «un livre sur rien» (*Mme Bovary*) où la forme l'emporte sur le contenu. A la suite de ces procès Flaubert et Baudelaire sont bannis des salons et de la bonne société. Les fractions et les écrivains se rangent d'un côté ou de l'autre, mais dans l'ensemble ils semblent bien «des défenseurs d'une définition "immorale" de l'art, surtout lorsque, comme Flaubert, ils paraissent mettre leur recherche formelle au service d'un abaissement du monde bourgeois» (p. 129).

Il est utile de rappeler que le mot réaliste/réalisme change selon les écoles, mais ces termes pour les institutions (l'Académie, l'État, une certaine presse, notamment celle soumise à l'État) marquent une outrance et deviennent les synonymes de révolutionnaire et révolté, tandis que l'art «sociale» devient synonyme d'art «utile».

Baudelaire qui sépare la morale de l'art continue à avoir une «relation contradictoire de participation-exclusion qui (le) lie aux dominants et aux dominés» (p. 133), si on lit politiquement le poème «L'Héautontimorouménos», tout en approuvant après la révolution les formes de la transgression et de la révolte. Baudelaire se méfie du bourgeois, qu'il interprète comme une condition sociale présente un peu partout, comme écrira Flaubert à George Sand: «Je comprends dans le mot de bourgeois, les bourgeois en blouse comme les bourgeois en redingote» (lettre de mai 1867 citée par Bourdieu, p. 136); les bourgeois ne représentent aux yeux des artistes non seulement une classe (les banquiers, les notaires, les commerçants), même si cette haine ou horreur des bourgeois est généralisée chez beaucoup d'écrivains pour le dédain qu'ils

montrent pour l'argent et pour le pouvoir économique, puisque Flaubert soutient que l'œuvre d'art n'a pas de prix.

Bourdieu à ce propos rappelle justement que «dans *L'Éducation sentimentale* Flaubert englobe dans le même mépris les conservateurs attachés à l'ordre bourgeois et les réformateurs épris de chimères. Le sociologue souligne encore que «Baudelaire, ici encore se montre beaucoup plus radical que Flaubert: notamment à propos de George Sand: bête, lourde, bavarde» (p. 138).

En définitive c'est «un monde économique à l'envers» (c'est le titre d'un paragraphe sur l'autonomie de l'art) que Baudelaire et Flaubert proposent, surtout ce dernier qui écrit dans une lettre à G. Sand en mai 1859 qu'il préfère devenir pion dans un collège plutôt qu'écrire pour de l'argent (voir la citation à la page 145).

Bourdieu considère Flaubert «un bourgeois furieusement antibourgeois» (p.190) mais il défend «l'originalité de son entreprise» (p. 167) et il rappelle que Zola voit dans l'auteur de *L'Éducation sentimentale* un bourgeois, le plus digne le plus scrupuleux, le plus rangé qu'on pût voir », en le jugeant dans son essai *Les romanciers naturalistes* (1923) «un styliste impeccable» mais surtout «un négateur » qui «professe le véritable nihilisme: (...), il n'a pas écrit une page où il n'ait creusé notre néant» (p.160). Ce lien des trois écrivains à propos du réalisme confirme en général la vocation sociologique et antibourgeoise de la littérature. Mais il faudra attendre Zola pour comprendre finalement le rôle d'intellectuel (c'est lui qui invente l'intellectuel) que joue l'écrivain dans la société, comme témoigne notamment ce fameux «j'accuse» lancé dans l'affaire Dreyfus.

Bourdieu s'aperçoit dans l'analyse des similitudes et des différences entre la création littéraire et l'analyse sociologique de l'œuvre qu'il «se laisse prendre au jeu des procédés et des ressources créatives de Flaubert» (Miceli 2004: 286); s'il semble difficile au personnage central, Frédéric, cet accès à un statut social à cause de son indétermination, il faut admettre que «les relations affectives et sentimentales constituent la structure qui fonde la fiction» dans l'univers romanesque flaubertien et suggèrent, selon Miceli «une ambivalence entre l'analyse sociologique et la construction fictionnelle». Seulement la fiction littéraire, connue sous la forme de l'illusion romanesque, peut donc créer «l'effet de réel » ou mieux encore abolir toute frontière entre la réalité et la fiction ; mais d'autre part la lecture sociologique réussit à «rompre le charme aveuglant de cette fiction émouvante du monde social» (Miceli: 287).

Bibliographie

Bourdieu P., (1992), *Les règles de l'art, Genèse et structure du champ littéraire*, Paris, Éditions du Seuil, (trad. italiana, *Le regole dell'arte*, Introduzione di A. Boschetti, Il Saggiatore, 1913)

AA.VV., (2009), *Pierre Bourdieu, Un philosophe en sociologie*, ed. Lescourret M.-A., Paris, Puf, 2009.

Boschetti A., (2003), *La rivoluzione simbolica di Pierre Bourdieu*, Venezia, Marsilio, 2003

Eastwood J., (2007), "Bourdieu, Flaubert, and the Sociology of Literature", in *Sociological Theory* Vol. 25, No. 2, pp. 149-169.

Pinto L., (2002), *Pierre Bourdieu et la théorie du monde social*, Paris, Albin Michel.

Pinto L., Shapiro G., Champagne P. (sous la direction de) (2004) *Pierre Bourdieu, sociologue*, Paris, Fayard.

Louis Pinto, (1999), *Pierre Bourdieu et la théorie du monde social*, Paris, Albin Michel, coll. «Idées».

Jurt J., (2008), L'apport de la théorie du champ aux études littéraires, dans *Pierre Bourdieu, sociologue cit.*, pp. 255-276 ; Joseph Jurt, *Bourdieu*, Stuttgart, P. Reclam.

Paolucci G., (2011), *Introduzione a Pierre Bourdieu*, Roma, Laterza.

Paolucci G. (a cura di) (2010), *Bourdieu dopo Bourdieu*, UTET Università.

Bibliographie générale sur Bourdieu sociologue

Pour mieux connaître la pensée sociologique de Pierre Bourdieu nous ajoutons d'autres lectures appartenant à un domaine plus vaste que celui abordé pour l'étude des *Règles de l'art*. Commençons par des ouvrages collectifs .

AA. VV., « Autour de Pierre Bourdieu », *Actuel Marx*, Paris, n° 20, juin-déc. 1996, p. 7-147 ;

AA. VV., « Le monde selon Bourdieu », *Sciences humaines*, Auxerre, n° 105, mai 2000, p. 23-36 ;

AA. VV., « L'œuvre de Pierre Bourdieu », *Sciences humaines*, Auxerre « Numéro spécial consacré à Pierre Bourdieu », 2002, p. 1-109 ;

AA. VV., « Pierre Bourdieu », *French Cultural Studies*, Chalfont St. Giles, vol. 4, n° 12 « Numéro spécial consacré à Pierre Bourdieu », octobre 1993, p. 205-304 ;

AA. VV., « Pierre Bourdieu », *Critique*, vol. 51, n° 579-580, août-sept. 1995, p. 547-703 ;

AA.VV., « Pierre Bourdieu, l'intellectuel dominant ? », *Magazine littéraire*, n° 369, octobre 1998, p. 18-70 ;

AA. VV., « Intellectuals and the 90s », *Contemporary French Civilization*, vol. 24, n° 2 « Numéro spécial », été 2000, p. 169-379 ; Collectif et Philippe Corcuff (conseiller scient.), *Pierre Bourdieu : les champs de la critique*, Paris, Bibliothèque Publique d'Information du Centre Pompidou, 2004, 284 p. ; Philippe Corcuff, *Bourdieu autrement, Fragilités d'un sociologue de combat*, Paris, Éditions Textuel, 2003, 144 p. ;

« Le Symbolique et le Social. La réception internationale de la pensée de Pierre Bourdieu », dans Jacques Dubois, Pascal Durand et Yves Winkin (sous la direction de), *Actes du colloque de Cerisy-la-Salle*, Liège, Éditions de l'Université de Liège, coll. « Sociopolis », 2005, 323 p. ;

Alain Accardo, *Introduction à une sociologie critique : lire Bourdieu*, Marseille, Agone, 2006 (1^{re} éd. 1983) ;

Bernard Lahire (dir.), *Le travail sociologique de Pierre Bourdieu : dettes et critiques*, Paris, La Découverte, coll. « Textes à l'appui », 1999, 257 p.

Derek Robbins, *The work of Pierre Bourdieu : recognizing society*, Milton Keynes, Open University Press, 1991, 220 p. ;

Emanuela Susca, *Pierre Bourdieu , Il lavoro della conoscenza* , Milano, F. Angeli, 2011, 175 p. ;

Jacques Hamel, « Les partis pris méthodologiques de Pierre Bourdieu et d'Alain Touraine », *La Pensée*, n° 317, janv.-mars 1999, p. 69-86 ;

Jean Baudouin, *Pierre Bourdieu : Quand l'intelligence entrain enfin en politique ! 1982-2002*, Paris, Le Cerf, 2012, 122 p. ;

Nathalie Heinich, *Pourquoi Bourdieu*, Paris, Gallimard, coll. « Le Débat », 2007, 188 p ;

Pierre Encrevé et Rose-Marie Lagrave (dir.), *Travailler avec Bourdieu*, Paris, Flammarion, coll. « Champs », 2004 ;

Pierre Favre, *Méthodes des sciences sociales : l'exemple de la sociologie de Pierre Bourdieu*, Université de Clermont 1, Faculté de droit et de science politique, 1979, 218 p. – Cours DEA de politique comparée, 1978-79 ;

Pierre Mounier, *Pierre Bourdieu, une introduction*, Paris, Pocket, coll. « Agora » (n° 231), 2001, 282 p. ; Jacques Bouveresse et Daniel Roche (dir.), *La liberté par la connaissance. Pierre Bourdieu (1930-2002)*, Paris, Odile Jacob, coll. « Collège de France », 2004 ;

Richard Harker, Cheleen Maher et Chris Wilkes, *An introduction to the work of Pierre Bourdieu : the practice of theory*, Basingstoke, Macmillan, 1990 ;

Science & Philosophy, Volume n.3, Issue n.1, 2015

Contents

Articoli in lingua Italiana

Emilio Ambrisi

La Matematica delle Tavole degli Apprendimenti 3

Franco Blezza

Pedagogia e Didattica della Chimica 15

Mario I. Mandrone

Matematica e Storia: Storia ed Epistemologia dell'Analisi: dal Metodo di Esaustione all'Integrale Definito 37

Fabrizio Maturo

Quesiti e Test di Probabilità e Statistica: un'Analisi Critica 61

Ferdinando Casolaro, Luca Cirillo, Raffaele Prosperi

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie 73

Articles en Français

Fernando Cipriani

Bourdieu Sociologue de Flaubert 107

Published by Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo
(A.P.A.V.)