Science & Philosophy, 3(1)/2015, 61--72 ISSN online: 2282-7765
print: 2282-7757

Quesiti e test di Probabilità e Statistica: un'analisi critica

Fabrizio Maturo

Dipartimento di Economia Aziendale
Università di Chieti-Pescara
f.maturo@unich.it

Sunto

Nei corsi di Probabilità e Statistica, un metodo molto diffuso per la valutazione degli studenti consiste nel sottoporli a quiz a risposta multipla. L'uso di questi test permette di valutare alcuni tipi di abilità come la rapidità di risposta, la memoria a breve termine, la lucidità mentale e l'attitudine a gareggiare. A nostro parere, la verifica attraverso i test può essere sicuramente utile per l'analisi di alcuni aspetti e per velocizzare il percorso di valutazione ma si deve essere consapevoli dei limiti di una tale procedura standardizzata e quindi escludere che le valutazioni di alunni, classi e scuole possano essere ridotte a elaborazioni di risultati di test. A dimostrazione di questa tesi, questo articolo argomenta in dettaglio i limiti principali dei test, presenta alcuni recenti modelli proposti in letteratura e propone alcuni metodi di valutazione alternativi.

Paole Chiave: item responce theory, valutazione, test, probabilità

1. Introduzione

Nei test per la valutazione dell'apprendimento della Probabilità e della Statistica, un possibile metodo di valutazione consiste nel sottoporre gli studenti a quiz a risposta multipla. Se ad esempio le possibili risposte sono quattro, si può pensare che, una risposta sia quella esatta, una sia quella del tutto sbagliata, le altre due possano sembrare esatte a un individuo poco attento, o poco preparato, o poco abile, e determinano, dunque, la *selettività* del quesito.

L'uso dei test permette di valutare alcuni tipi di abilità come ad esempio:

- rapidità di risposta,
- memoria a breve termine,
- lucidità mentale,
- attitudine a gareggiare.

Tuttavia vi sono molte controindicazioni che, a nostro parere, ne consigliano un uso limitato.

Infatti usando i test invece di un colloquio, può capitare che:

- sia impedita una analisi approfondita del problema,
- siano sacrificate le intelligenze analitiche,
- sia appiattita la fantasia e la libertà di espressione,
- siano considerate come errore delle idee e delle soluzioni originali,
- la velocità è contro la risposta ragionata e brillante.

Vi sono ragazzi che, animati da spirito sportivo, si possono divertire a gareggiare con un test, ma altri ragazzi, timidi, insicuri, riflessivi e non rapidi nelle decisioni, possono essere sacrificati, pur avendo le capacità per emergere brillantemente a lungo termine.

Forse un punto su cui riflettere è proprio decidere se la scuola deve *formare*, *informare* o *far gareggiare*.

E se la scuola deve insegnare a gareggiare, gli studenti devono: *doparsi imparando a risolvere, con una prestazione immediata, batterie di quiz?* oppure *devono seguire un accurato percorso formativo per poter vincere da adulti senza doping?*

Riteniamo che la verifica attraverso i test può essere utile per l'analisi di alcuni aspetti, ma si deve essere consapevoli dei limiti di una tale procedura automatica e quindi escludere che le valutazioni di alunni, classi e scuole possano essere ridotte a elaborazioni di risultati di test.

Gli automatismi provocano una eccessiva semplificazione delle relazioni scolastiche, eliminando il contributo del complesso rapporto umano studente-docente e astraendo dalla complessità dell'essere umano che impara e agisce soprattutto per emozioni e non per automatismo logico.

Forse i migliori risultati ottenuti nei test INVALSI nel nord rispetto al sud dipendono dalla maggiore carica emotiva presente nelle popolazioni del sud che porta a rifiutare una valutazione arida e impersonale e a desiderare relazioni più umane e calorose in ambito scolastico.

Non bisogna inoltre trascurare l'impatto che l'uso predominante dei test può avere sul lavoro degli insegnanti. I test limitano la libertà di insegnamento, facendo sostituire in gran parte alla programmazione didattica dell'insegnante un itinerario alternativo di preparazione ai test. Ciò è un danno se la libertà di insegnamento è intesa, correttamente, come possibilità, per il docente, di trasmettere il suo entusiasmo, di mostrare i valori in cui crede e curare gli aspetti su cui ha maggiore competenza e maturità.

In seguito, partendo da quesiti apparentemente banali, mostriamo come si può impostare una accurata analisi che può anche far accettare soluzioni diverse da quella “corretta”.

Il dubbio, anche sulle cose apparentemente più scontate, è il motore che ha permesso le ricerche più rivoluzionarie. Perché non affermare la cultura del dubbio?

L'errore non è da rimproverare, ma deve far riflettere. Errare significa avere un modo di ragionare diverso dalla massa, punti di vista diversi e sono proprio i punti di vista originali che fanno crescere la scienza.

2. Analisi critica di quesiti di probabilità

Ovvero: cosa si può nascondere dietro quesiti apparentemente semplici con “risposte esatte” apparentemente “inequivocabili”.

2.1 *Il quesito del figlio maschio*

In una famiglia ci sono due figli. Sapendo che uno dei figli è femmina, qual è la probabilità che l'altro figlio sia maschio?

Soluzione ingenua: L'altro figlio può essere maschio o femmina con uguale probabilità, per cui la probabilità cercata è 1/2.

Spunti di riflessione: Che vuol dire “uno dei figli è femmina?”, che è femmina *uno solo* dei figli o che è femmina *almeno uno* dei figli? Nel primo caso la probabilità cercata sarebbe 1. Quindi, se si parte dal principio di non ritenere la domanda banale, il significato da accettare è il secondo. Ma è sempre una interpretazione.

Perché si dà per scontato che le probabilità di maschio e femmina siano uguali? Ammesso che siano uguali prima di sapere che uno dei figli è femmina, questa informazione non fa cambiare la probabilità che l'altro figlio sia maschio? Forse la famiglia ha un'attitudine ad avere figlie femmine.

Perché la soluzione ingenua non va bene? Si tratta sempre di interpretare il significato del quesito da un punto di vista linguistico. La soluzione ingenua andava bene per una domanda posta nei seguenti termini: “...Sapendo che il primo figlio è femmina....” oppure “...Sapendo che il secondo figlio è femmina...”. Ma l'informazione “...Sapendo che uno dei figli è femmina...” è più complessa, è la disgiunzione (o unione) delle due affermazioni.

Una colpa della confusione nell'interpretazione è nell'enunciato “l'altro figlio sia maschio”. La parola “altro” non ha un significato logico e induce a pensare che la premessa "...Sapendo che uno dei figli è femmina..." faccia riferimento al primo o al secondo figlio in particolare. Questo enunciato va tradotto nella formulazione logica: "almeno uno dei figli è maschio".

Soluzione con i costituenti. Indichiamo con F1 e F2, rispettivamente, gli eventi "il primo figlio è femmina" e "il secondo figlio è femmina". Indichiamo inoltre con M1 e M2, rispettivamente, gli eventi "il primo figlio è maschio" e "il secondo figlio è maschio". Una partizione dell'evento certo appropriata per il quesito è {F1 F2, F1 M2, M1 F2, M1 M2}. L'informazione "uno dei figli è femmina" porta ad escludere il costituente M1 M2. Resta la partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2} e l'evento "almeno uno dei figli è maschio" è verificato in 2 casi su 3, per cui la risposta attesa da chi ha formulato il quesito è che la probabilità cercata è 2/3.

Un aspetto psicologico Il risultato di 2/3 può essere psicologicamente sorprendente. Qualcuno può ingenuamente chiedersi come è possibile che la probabilità a priori di un maschio, uguale a 1/2, aumenti, diventando 2/3, dopo aver osservato che c'è una femmina. In realtà l'equivoco nasce dalla forma dell'enunciato "l'altro figlio sia maschio", che con la parola matematicamente indefinita "altro" non fa capire che il suo significato logico è "almeno uno dei figli è maschio". Tale evento, prima di sapere che uno dei figli è femmina, era verificato in 3 casi su 4 e quindi aveva probabilità uguale a 3/4. Quindi in realtà l'informazione "uno dei figli è femmina" ha diminuito la probabilità di "almeno uno dei figli è maschio", portandola da 3/4 a 2/3.

Ma veramente non ci dubbi? Ci sono tanti dubbi. Un pensatore con una mentalità analitica forse perderebbe tanto tempo a rispondere al quesito, scoprendo che vi sono tante cose date per scontate e che non lo sono affatto.

Perché dobbiamo ritenere che le probabilità dei costituenti nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2, M1 M2} siano tutte uguali? Perché dopo aver escluso il costituente M1 M2 riteniamo che le probabilità dei costituenti nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2} siano ancora tutte uguali? L'informazione che uno dei figli è femmina non potrebbe ad esempio far pensare ad una attitudine della famiglia ad avere figlie femmine?

In tal caso, se si ritenesse soggettivamente che F1 F2 possa avere probabilità doppia rispetto agli altri costituenti si otterrebbe la soluzione ingenua, la probabilità di "almeno uno dei figli è maschio" sarebbe 1/2!

Sono gli *assiomi della probabilità condizionata* che impongono che le probabilità dei vari costituenti F1 F2, F1 M2, M1 F2 nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2} siano *proporzionali* a quelle degli stessi costituenti nella partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2}.

Quale significato concreto si può dare a tale proporzionalità in qualche contesto in cui si considerano delle misure? Ad esempio se una partizione è vista come l'insieme dei componenti di un edificio, la proporzionalità potrebbe significare che togliendo un elemento di un edificio le relazioni fra gli elementi rimanenti rimangono inalterate. Se una partizione è l'insieme dei componenti di una famiglia la proporzionalità potrebbe significare che togliendo un componente della famiglia le relazioni fra gli altri componenti non cambiano. Ma è proprio così? Se non ci sembra corretto che sia così appare appropriato ottenere misure condizionate soddisfacenti a regole alternative rispetto alla proporzionalità. Alcune di esse sono chiamate "misure condizionate fuzzy". In seguito vedremo un esempio.

Regole alternative alla proporzionalità Siano A e B due eventi con A contenuto in B. Indichiamo con p(A/B) la probabilità dell'evento A una volta noto che si verifica B. La regola di proporzionalità della proprietà condizionata equivale alla seguente *proprietà moltiplicativa.*

Per ogni terna A, B, C di eventi tale che A è contenuto in B e B è contenuto in C, risulta

(proprietà moltiplicativa) $\qquad p(A/C) = p(A/B)\, p(B/C).$

Infatti ponendo C uguale all'evento certo costituito dalla partizione {F1 F2, F1 M2, M1 F2, M1 M2}, B uguale all'evento "uno dei figli è femmina", A uguale ad un costituente e k = p(B/C), per ogni costituente A si ottiene:

$$p(A) = p(A/B)\, k,$$

dove k non dipende da A. Ossia le probabilità dei costituenti sono proporzionali alle probabilità dei costituenti condizionati a B.

Soluzione del quesito con la probabilità condizionata. Sia F l'evento "almeno un figlio è femmina" e M = "almeno un figlio è maschio". Posto A = FM nella formula moltiplicativa si ottiene

$$p(FM) = p(FM/F)\, p(F).$$

Essendo p(F) = 3/4, p(FM) =1/2, dalla regola moltiplicativa si deduce che necessariamente deve essere p(FM/F) = 2/3.

Proviamo ad usare una alternativa alla regola moltiplicativa Una possibile alternativa è la seguente *proprietà del minimo.*

Per ogni terna A, B, C di eventi tale che A è contenuto in B e B è contenuto in C, risulta:

(proprietà del minimo) $p(A/C) = \min\{p(A/B), p(B/C)\}$.

La proprietà del minimo e la proprietà moltiplicativa sono due casi particolari applicazione del seguente *criterio generale di monotonia* che sembra ragionevole accettare.

Se A e B sono due eventi con A contenuto in B, allora, per ogni evento H vale la seguente:

(proprietà di monotonia) $p(A / B \cup H) \leq p(A / B) \leq p(A \cup H / B)$.

Ossia, aumentando l'evento condizionante, ossia aggiungendo un pezzo alla partizione, l'importanza dell'evento A diminuisce o resta uguale. Invece, a parità di partizione, se si aumenta l'evento A, la sua importanza aumenta o resta uguale.

Importante caratterizzazione. Richiedere la proprietà del minimo significa considerare per p(A/C) il *massimo valore* che soddisfa la proprietà di monotonia.

Nel nostro problema, applicando la formula del minimo si ottiene:

$p(FM) = \min\{p(FM/F), p(F)\}$.

Essendo $p(F) = 3/4$, $p(FM) = 1/2$, dalla regola del minimo si deduce che necessariamente deve essere $p(FM/F) = 1/2$.

La regola del minimo concorda con la soluzione ingenua!

Che succede al genio? Un genio che avesse applicato criteri come la regola del minimo perché con opportuni ragionamenti li avesse ritenuti più adeguati (ad esempio riteneva opportuno considerare la massima probabilità compatibile con la proprietà di monotonia) avrebbe avuto un *esito negativo* in un esame basato su quesiti convenzionali a risposta chiusa!

La persona con spirito critico e che ha idee geniali ha spesso una intuizione brillante che però non è ancora formalizzata nei canali espressivi usuali e neanche segue i ragionamenti codificati.

Altra alternativa di discussione e di critica. Anche nelle ipotesi di:

- accettare l'assiomatica usuale del calcolo delle probabilità;
- ammettere che il sesso del secondo figlio sia indipendente da quello del primo figlio;

perché mai deve essere accettata l'ipotesi che la probabilità di un figlio maschio sia 1/2?

Appare invece corretto lasciare tale probabilità indeterminata e indicarla con x. Allora gli eventi F1 F2, F1 M2, M1 F2, M1 M2 hanno, rispettivamente, probabilità $(1-x)^2$, x(1-x), x(1-x), x^2, e applicando la regola di proporzionalità, gli eventi F1 F2, F1 M2, M1 F2 condizionati all'ipotesi che uno dei figli sia femmina, hanno probabilità $(1-x)^2/(1+x)$, x/(1+x), x/(1+x), dove x può essere un qualsiasi valore appartenente all'intervallo chiuso [0, 1].

Una osservazione. Può essere x = 1 anche se si sa che un figlio è femmina? Sì, anche se potrebbe sembrare strano che si sia avuta una femmina quando la probabilità della femmina è nulla! Ma può succedere. Infatti è da precisare che un evento di probabilità nulla non necessariamente coincide con l'evento impossibile. I numeri reali appartenenti all'intervallo [0, 1] non sono sufficienti per dare probabilità diverse ad ogni coppia di eventi con diversa facilità di verificarsi. Occorrerebbero i numeri iper-reali, ma ci sarebbero però altre difficoltà.....

In conclusione la probabilità di avere un figlio maschio sapendo che uno dei figli è femmina non è un numero, ma è la funzione

$$f(x) = (2x)/(1+x), \text{ con } x \text{ in } [0, 1].$$

Risulta f(0) = 0, f(1) = 1 e inoltre:

$$f'(x) = 2/(1+x)^2,$$

per cui, nelle ipotesi usuali di indipendenza fra il sesso del primo figlio e quello del secondo figlio e di validità della legge moltiplicativa per gli eventi condizionati la risposta giusta sarebbe indicare la funzione f(x). Per x = 1/2 la funzione vale 2/3, per x = 1/3 la funzione vale 1/2.

Quindi i valori 1/3 e 1/2 possono andare entrambi bene come risposta al quesito e così ogni altro valore compreso nell'intervallo [0, 1]. Dipende dal valore a priori x.

La risposta corretta al quesito, nelle ipotesi accettate, è di dire che la probabilità che l'altro figlio è maschio è la funzione f(x). Ma è prevista fra le 4 risposte al test?

La derivata f'(x) è strettamente decrescente e passa dal valore 2 per x = 0 al valore 1/2 per x =1. Può avere qualche significato pratico? I valori più bassi sono più selettivi?

2.2 **Il quesito dei tre prigionieri**

Si sa che di tre prigionieri situati in celle diverse e che non possono comunicare, due saranno giustiziati e uno si salverà. Uno dei prigionieri chiede *alla guardia di conoscere il nome di uno degli altri due che verrà condannato. Qual è la probabilità di salvarsi dopo aver avuto tale informazione?*

Soluzione ingenua: Siano A, B, C i tre prigionieri e siano C il prigioniero che ha ricevuto l'informazione dalla guardia e A il nome del prigioniero che viene indicato come condannato. Allora il prigioniero che si salva è o B o C, per cui la probabilità che C si salvi è 1/2.

Soluzione con i costituenti Siano SA, SB, SC rispettivamente gli eventi "Si salva A", "Si salva B", "Si salva C". Siano inoltre IA, IB rispettivamente gli eventi "La guardia indica A", "La guardia indica B". Prima dell'informazione i costituenti sono SA, SB, SC. Per motivi di simmetria li possiamo ritenere equiprobabili per cui risulta p(SC) = 1/3.

Considerando l'informazione, prima che la guardia fornisca l'informazione i costituenti da considerare sono IA SB, IA SC, IB SA, IB SC. Se l'informazione indica che viene giustiziato A restano i costituenti IA SB, IA SC. Se essi fossero equiprobabili allora, poiché C si salva solo se si verifica il costituente IA SC, si arriverebbe alla soluzione ingenua.

Ma sono equiprobabili? La soluzione deriva da una semplice osservazione:

SB implica IA e SA implica IB, per cui SB IA = SB, SA IB = SA.

Quindi i costituenti iniziali sono in realtà SB, IA SC, SA, IB SC. Poiché SA e SB hanno entrambi probabilità 1/3 segue che p(IA SC) + p(IB SC) = 1/3.

Se si assume che, a priori, i due eventi IA SC e IB SC sono equiprobabili le loro probabilità diventano entrambe 1/6.

Dopo l'informazione che A viene giustiziato rimangono solo i costituenti SB, IA SC.

Se ammettiamo che le probabilità dopo l'informazione siano proporzionali a quelle prima dell'informazione deve risultare p(SB) = 2 p(IA SC) e quindi, dovendo essere p(SB) + p(IA SC) = 1, segue che p(SB) = 2/3 e p(IA SC) = 1/3. Una volta verificatasi l'informazione IA, risulta IA SC = SC, per cui P(SC) = 1/3.

Se si vuole far valere la proprietà del minimo?

Se si vuole che, per ogni terna E, F, G di eventi tale che E è contenuto in F e F è contenuto in G, risulti:

(proprietà del minimo) $\qquad p(E/G) = \min\{p(E/F), p(F/G)\}.$

allora, ponendo G uguale all'evento certo, F = IA, E = IA SC, si ottiene:

$$p(IA\ SC) = \min\{p(IA\ SC\ /\ IA), p(IA)\}.$$

Essendo p(IA SC) = 1/6, p(IA) = 1/2, si arriverebbe a p(IA SC / IA) = 1/6. La situazione per il prigioniero C sarebbe ancora peggiore rispetto a quella che si ottiene con la proprietà moltiplicativa! Il modello con la proprietà del minimo sembra proprio inadeguato...a meno che non ci siano condizioni particolari che lo rendano plausibile.

Soluzione con il Teorema di Bayes. E' la più rapida a partire dalla regola moltiplicativa. Si ha:

p(SC / IA) = p(SC IA) / p(IA) = [p(SC) p(IA/SC)]/p(IA) = [1/3 1/2] / 1/2 = 1/3.

3. La valutazione statistica dei test

3.1 *La valutazione basata sulla funzione logistica*.

Generalmente la teoria statistica della valutazione delle risposte ai quesiti, o "Item Response Theory" (Baker, 2001; Rizopoulos, 2006; Reckase, 2009; Hambleton e Swaminathan, 1985; Ceccatelli at al. 2013a, 2013b) ammette come *assiomi* o *ipotesi a priori* che ci possano considerare due grandezze continue e misurabili:

X = grado di *abilità* (*preparazione/capacità*) dello studente;

P = *probabilità che lo studente dia la risposta esatta* ad un determinato quesito;

soddisfacenti almeno alle le seguenti condizioni:

(C1) X varia nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$

(C2) P è una funzione crescente P = P(x) (ma non necessariamente strettamente crescente) del valore x assunto da X;

(C3) per x che tende a $-\infty$, la P tende a 0 e per x che tende a $+\infty$, la P tende a 1.

Si assume che l'abilità X sia nulla per lo "studente medio". La probabilità P dipende dallo studente (ossia dalla sua abilità) e da altri parametri dipendenti dal tipo di quesito.

Usualmente si assume che la funzione P(x) sia rappresentata dall'equazione logistica:

$$P(x) = \frac{e^{a(x-b)}}{1+e^{a(x-b)}}$$

dove a è un parametro positivo indicante il *grado di selettività* del quesito e b è un parametro reale indicante il *grado di difficoltà* del quesito stesso.

In particolare la funzione logistica ha le proprietà (C1), (C2), (C3).

La derivata della P(x) è uguale a:

$$P'(x) = \frac{ae^{a(x-b)}}{(1+e^{a(x-b)})^2}$$

la derivata seconda è:

$$P''(x) = \frac{a^2 e^{a(x-b)}\left(1-e^{2a(x-b)}\right)}{(1+e^{a(x-b)})^4}$$

per cui il punto x = b è un punto di flesso discendente, ossia un punto di massimo per la derivata, in cui la funzione vale 1/2 e la derivata vale a.

3.2 Criteri alternativi di valutazione

Osserviamo che, se il punto di riferimento sono i valori a eb, rispettivamente il *grado di selettività e il grado di difficoltà* del quesito la funzione logistica può essere sostituita da una qualsiasi altra funzione che oltre ad avere le proprietà (C1), (C2), (C3) soddisfi alcuni requisiti di regolarità, dati dalle seguenti ulteriori condizioni:

(C4) la P(x) è continua;

(C5) la P(x) è generalmente derivabile, con derivata generalmente continua, ossia esiste al più un insieme finito di punti D in cui la derivata o non esiste o non è continua;

(C6) esiste un solo punto b non appartenente a D tale che la derivata P'(x) è crescente in (-∞, b) e decrescente in (b,+ ∞) quindi la funzione P(x) ha b_0 come *unico punto di flesso;*

(C7) P'(b) = a.

Il punto b rappresenta il *livello di abilità (preparazione/capacità)* in cui il quesito diventa *discriminatorio*, ossia quando X varia in un opportuno intorno di b l'incremento di P è molto elevato. Il valore P(b) è la *probabilità di dare una risposta corretta al quesito* per un individuo con livello di abilità b. La derivata P'(b) è il grado di selettività del quesito.

Generalmente si assume che la funzione P(x) dipenda da alcuni parametri $c_1, c_2, \ldots, c_n$, i cui valori determinano b , P(b) e la derivata P'(b).

Può essere comodo richiedere l'ulteriore condizione;

(C8) P(b) = 1/2,

anche se non sembra una condizione indispensabile.

Sia f(x) la derivata della funzione P(x). Dalle condizioni (C1), …, (C7) segue che la f(x) ha le seguenti proprietà:

(D1) f(x) > 0 per ogni numero reale x;

(D2) f(x) è continua in R-D, dove D è un insieme vuoto o finito;

(D3) f(x) è integrabile in R, con $\int_R f(x)\,dx = 1$;

(D4) esiste un solo punto punto di massimo b e f(b) = a.

Da un punto di vista formale, la f(x) è la *densità di probabilità* di una distribuzione assolutamente continua e la P(x) è la sua funzione di ripartizione.

In particolare, data una funzione f(x) soddisfacente le condizioni (D1),..., (D4) da essa si risale ad una funzione P(x) soddisfacente le condizioni (C1), …, (C7) ponendo $P(x) = \int_{(-\infty,x)} f(t)\,dt$.

La condizione aggiuntiva (C8) può essere soddisfatta in vari modi. Una semplice condizione è la simmetria della densità di probabilità f(x) rispetto alla retta verticale x = b. Ciò è verificato se f(x) è la derivata della funzione logistica.

Ma ci possono essere varie motivazioni per preferire una densità di probabilità non simmetrica ma dotata di opportune asimmetrie.

Osserviamo che, per ogni intervallo I di R, $\int_I f(x)\,dx$ è la *variabilità della probabilità* che un individuo con abilità appartenente a I dia la risposta esatta al quesito.

In conclusione, anche se la scelta prevalente nella letteratura statistica relativa all'analisi dei test è stata quella di usare come funzione P(x) la funzione logistica, fissati *grado di selettività* a *ed il grado di difficoltà* b del quesito possono essere presentate molte scelte alternative scegliendo una funzione densità di probabilità assolutamente continua f(x) che abbia b come punto di massimo e tale che f(b) = a. La corrispondente funzione di ripartizione P(x) ha lo stesso ruolo della funzione logistica dai punto di vista della selettività e della difficoltà del test. La simmetria della f(x) assicura anche la proprietà P(x) = 1/2, equivalente alla (C8).

Scegliere la funzione logistica o altre funzioni di ripartizione dipende da proprietà aggiuntive che si vuole siano soddisfatte. L'analisi delle proprietà aggiuntive desiderate e quindi della funzione di ripartizione preferibile in particolari contesti può essere un interessante argomento di ricerca.

4. Proposte per una Fuzzy Item Response Theory

Ci sembra che l'incertezza nel definire il *grado di abilità* e quello nel determinare la *probabilità di dare la risposta esatta* in corrispondenza di un certo grado di abilità possa essere affrontato in maniera più approfondita considerando tali valori non come numeri reali ma piuttosto come numeri fuzzy. In tal caso le variabili X e P sono fuzzy e così le funzioni P(x), f(x) e F(x) sostituite da funzioni fuzzy P*(x), f*(x) e F*(x) possono assumere, per ogni x, vari valori con vari gradi di appartenenza.

In maniera semplificata si può pensare che F(x) sia un segmento con inclinazione a, passante per il punto (b, 1/2) e con estremi sulle rette P=0 e P=1, ottenuto come parte retta regressione di P rispetto a X. Sostituendo alla regressione una regressione fuzzy si ottiene P*(x).

Bibliografia

Baker F.B. (2001) The basics of item response theory, ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, Washington

Ceccatelli C., Di Battista T., Fortuna F., Maturo F. (2013a). Best Practices to Improve the Learning of Statistics: The Case of the National Olympics of Statistic in Italy. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 93, 2194–2199. doi:10.1016/j.sbspro.2013.10.186

Ceccatelli C., Di Battista T., Fortuna F., Maturo F. (2013b). L'Item Response Theory come Strumento di Valutazione delle Eccellenze nella Scuola. Science & Philosophy, 1(1). Telematica Multiversum Editrice.

Di Battista, Tonio (2014). Metodi statistici per la valutazione. Franco Angeli.

Hambleton, R. K., & Swaminathan, H. (1985). Assumptions of Item Response Theory. Item Response Theory, 15–31. doi:10.1007/978-94-017-1988-9_2

Reckase, M. D. (2009). Unidimensional Item Response Theory Models. Multidimensional Item Response Theory, 11–55. doi:10.1007/978-0-387-89976-3_2

Rizopoulos D. (2006) ltm: An R package for latent variable modeling and item response theory analyses, Journal of Statistical Software, 17 (5), 1-25